

Diplomarbeit im Fachbereich Physik
an der Universität Bremen

Messung von Rotation und Verzerrung von
rauhem Festkörper-Oberflächen durch kohärente
Lichtstreuung

Stefan Bosse

14.10.1998

Gutachter:

Prof. Dr. Wilfried Staude
Prof. Dr. Jörn Bleck-Neuhaus

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theoretische Grundlagen	5
2.1	Specklewanderung	5
2.2	Täuschendes Musterwandern	8
2.3	Statistische Eigenschaften von Specklebildern	11
2.4	Musterkochen	14
3	Der Geschwindigkeitsgradiententensor	16
3.1	Rotation	16
3.2	Dehnung	17
3.3	Biegung	20
4	Mustergeschwindigkeit und Gradient	24
4.1	Rotation	24
4.2	Dehnung	26
4.3	Biegung	30
5	Kreuzkorrelationsfunktion	33
5.1	Kontinuierliche Signale	33
5.2	Diskrete Bilder	35
5.3	Bildverschiebung	35
5.4	Periodizität	36
5.5	Endliche Belichtungszeit	38
5.5.1	Verbreiterung der Korrelationsfunktion	39
5.5.2	Verschlechterung des Signal-Rausch-Verhältnisses	41
5.6	Integration und Autokorrelation	44
6	Experimenteller Teil	45
6.1	Detektoren	45
6.2	Belichtungssteuerung	47
6.3	Vorversuche	49
6.3.1	Bestimmung des Beleuchtungsdurchmessers	49
6.3.2	Messung im Fernfeld	51
6.3.3	Intensitätsverteilung	52
6.4	Auswertelgorithmen	53

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	2
6.5 Messung von Gradientenkomponenten	56
6.5.1 Rotation	56
6.5.2 Dehnung	67
6.5.3 Biegung	77
7 Diskussion der Meßmethode und Zusammenfassung	82

Kapitel 1

Einleitung

Zur Messung von Oberflächenverzerrungen stehen mehrere Verfahren zur Verfügung. Zum einen gibt es optische Verfahren wie die Speckle-Interferometrie oder Speckle-Holographie. Sie gestatten die simultane Aufnahme der Verformung der gesamten Oberfläche. Eine genaue Bestimmung des lokalen Gradienten der Oberfläche ist aber i.a. nicht möglich. Bei bewegten Oberflächen sind diese Verfahren überhaupt nicht anwendbar.

Zum anderen gibt es mechanische Verfahren, wie z.B. Dehnungsmeßstreifen, um Oberflächenverformungen feststellen zu können. Diese Verfahren sind auf wenigen Materialien und Anwendungsgebiete beschränkt. Auch bei diesen Verfahren ist eine lokale Bestimmung des Gradienten nicht oder nur sehr ungenau möglich.

Mit der in dieser Arbeit beschriebenen Meßmethode ist die berührungslose und zerstörungsfreie Messung von Geschwindigkeitsgradienten von diffusen Oberflächen möglich. Die diffuse Oberfläche wird dabei mit kohärentem Licht beleuchtet.

Im Gegensatz zu bisherigen Verfahren, wo die streuende Oberfläche auf den Detektor abgebildet wurde (Messung im Nahfeld), erfolgt die Aufnahme des von der Oberfläche gestreuten Lichtes im Fernfeld, so daß der Abstand vom Meßsystem zur streuenden Oberfläche nicht vorgegeben ist. Die Meßmethode ist damit nahezu unabhängig von der Geschwindigkeit der Oberfläche.

Der zu messende Geschwindigkeitsgradient verursacht eine Wanderung des Streulichtmusters in der Beobachtungsebene im Fernfeld. Es können einzelne Komponenten oder eine Linearkombinationen von Komponenten des Geschwindigkeitsgradiententensors (abhängig von der Streugeometrie) der Rotation, der Dehnung und der Biegung (einschließlich der Torsion) gemessen werden.

Zur Aufnahme des Streulichtes kann eine konventionelle CCD-Kamera verwendet werden. Zur Bestimmung einer Geschwindigkeitsgradientenkomponente werden nur zwei in einem kurzen Abstand aufgenommene Bilder des Streulichtes benötigt, die dann korreliert werden. Aus dieser sogenannten Kreuzkorrelation erhält man dann unter Berücksichtigung der Streugeometrie direkt die Gradientenkomponente (oder eine Linearkombination von Komponenten).

Anwendung kann diese Meßmethode z.B. in der industriellen Werkstoffprüfung

finden, wo die Rotationsgeschwindigkeit, Neigung oder Dehnung von (bewegten) Maschinenteilen bestimmt werden muß. Für die Dehnungsmessung wurden bisher oft Dehnungsmeßstreifen verwendet. Diese müssen aber direkt auf den Probekörper aufgebracht (geklebt) werden, was bei vielen Materialien (z.B. Gummi) nur schwer oder gar nicht möglich ist.

In den folgenden Kapiteln werden die Grundlagen, Störfaktoren und Probleme dieser Methode beschrieben. Die in der dieser Arbeit gemessenen Geschwindigkeitsgradientenkomponenten werden in Kapitel 3 mit den Grundlagen der technischen Mechanik (Festigkeitslehre) berechnet. In Kapitel 4 wird der Zusammenhang zwischen dem Geschwindigkeitsgradienten und der Wanderung des Streulichtmusters in Abhängigkeit von der verwendeten Streugeometrie hergestellt.

Die zur Auswertung der Messungen benötigte Kreuzkorrelationsfunktion wird in Kapitel 5 näher betrachtet und für diese Meßmethode optimiert. Kapitel 6 befaßt sich schließlich mit den experimentellen Auswertungen und dem Vergleich von berechneten und gemessenen Geschwindigkeitsgradientenkomponenten, um damit die Qualität der Meßmethode und deren Anwendbarkeit zu diskutieren.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

2.1 Specklewanderung

Die Grundlage der Gradientenmessung von verzerrten und rotierenden Oberflächen wird durch eine Meßmethode aus der Strömungsmechanik gebildet [1]. Dort basiert die Messung des Gradienten auf dem Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit eines statistischen Streulichtmusters (des Specklebildes), verursacht durch Lichtstreuung an strömenden, örtlich statistisch verteilten Partikeln, und dem Gradiententensor des strömenden Fluids (Abbildung 2.1).

Die Streuteilchen werden durch eine ebene Welle \vec{k}_e beleuchtet. Alle Streulichtkomponenten \vec{k}_a werden von einer Linse, deren Abstand zum Beobachtungsschirm B gleich deren Brennweite f ist, im Punkt P in der Beobachtungsebene B abgebildet. Die Beobachtungsebene entspricht dem Fernfeld (Fraunhofer-Region).

Die Amplitude der Streulichtwellen am Ort P läßt sich dann schreiben als Überlagerung aller gestreuten Wellen:

$$E_P(\vec{q}, t) = \sum_i E_0(\vec{r}_i) e^{-i(\omega t + \vec{r}_i(t) \cdot \vec{q} + \phi)} \quad (2.1)$$

$$\text{mit } \vec{q} = \vec{k}_e - \vec{k}_a \quad (2.2)$$

Der Wellenvektor der einfallenden Welle \vec{k}_e soll festgehalten werden. Wegen $|\vec{k}_e| = |\vec{k}_a| = 2\pi/\lambda$ müssen alle gestreuten Vektoren \vec{k}_a auf einer Kugel, der sogenannten Ewaldkugel liegen (siehe Abbildung 2.2)

Die Intensität $I = EE^*$ dieser Streulichtwellen an den Punkten P des Beobachtungsschirms bildet zusammen das sogenannte Specklebild und mit $E_0(\vec{r}_i) \approx E_0(\vec{r}_j) = E_0$ folgt:

$$I_P(\vec{q}, t) \sim \sum_i \sum_j e^{-i\vec{q}(\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t))} \quad (2.3)$$

Das i -te Streuteilchen befindet sich am Ort \vec{r}_i und bewegt sich mit der Geschwindigkeit

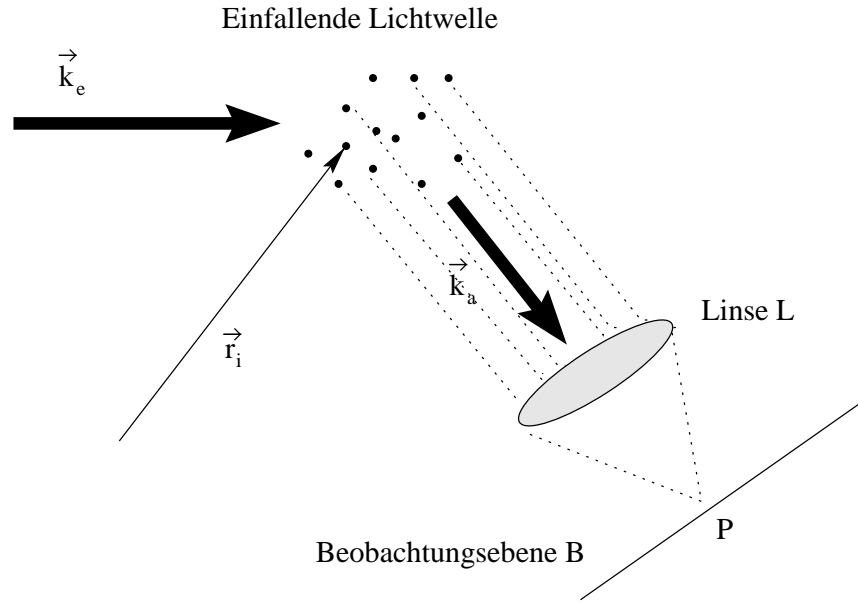


Abbildung 2.1: Allgemeines Streuexperiment an bewegten Partikeln

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \hat{\Gamma} \vec{r}_i \quad (2.4)$$

Der Tensor $\hat{\Gamma}$ ist der (hier als räumlich und zeitlich konstant angenommene) Geschwindigkeitsgradiententensor. Nach [12] stellt das Geschwindigkeitsfeld in Gleichung 2.4 ein System von Differentialgleichungen dar, das folgende Lösung hat:

$$\vec{r}(t) = e^{\hat{\Gamma}t} \vec{r}(0) + \int_0^t e^{\hat{\Gamma}t'} dt' \vec{v}_0 \quad (2.5)$$

$$\equiv \hat{R}(t) \vec{r}(0) + \hat{S}(t) \vec{v}_0 \quad (2.6)$$

Der im Phasenfaktor der Exponentialfunktion in Gleichung 2.3 auftretende Abstand zweier Streuteilchen lässt sich dann mit Hilfe von Gleichung 2.6 schreiben als:

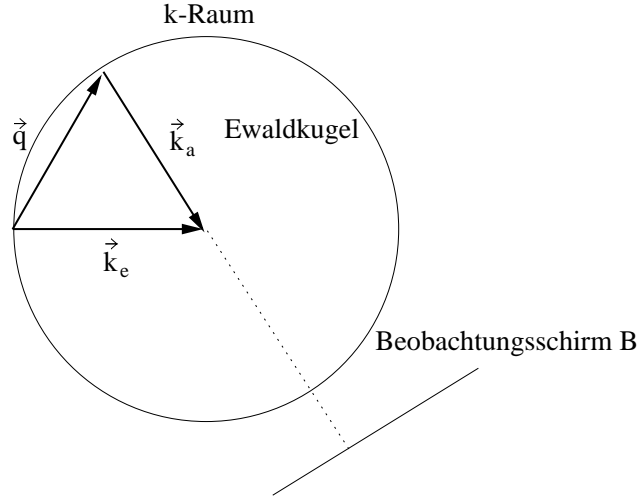
$$\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t) = \hat{R}(t) (\vec{r}_i(0) - \vec{r}_j(0)) \quad (2.7)$$

Die Überlagerung der Partialwellen am Ort P zum Zeitpunkt t war zur Zeit $t = 0$ an einem anderen Ort P' anzutreffen:

$$\vec{q}' = \hat{R}^T(t) \vec{q}$$

Anders ausgedrückt wandert ein Punkt im Streulichtmuster in der Zeit t von einem Ort im \vec{k} -Raum, der durch $\vec{q}' = \vec{q}(0)$ gegeben ist, zu $\vec{q} = \vec{q}(t)$. Für kurze Zeiten $\|\hat{\Gamma}\| t \ll 1$ kann man für $\hat{R}(t)$ die Näherung durchführen:

$$\hat{R}(t) \approx 1 - \hat{\Gamma}^T t$$


 Abbildung 2.2: Die Ewaldkugel im \vec{k} -Raum

so daß man schreiben kann:

$$\vec{q}(t) = \vec{q}(0) - t\hat{\Gamma}^T \vec{q}(0) \quad (2.8)$$

und die zeitliche Ableitung $\frac{d\vec{q}(t)}{dt} = -\hat{\Gamma}^T \vec{q}(0)$ (2.9)

$\dot{\vec{q}}(t)$ ist dabei die Wanderungsgeschwindigkeit des Specklemusters, die jetzt in Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsgradiententensor ausgedrückt ist. Gleichung 2.9 läßt sich auch als zeitliche Ableitung des gestreuten Vektors \vec{k}_a schreiben:

$$\dot{\vec{k}}_a = -\hat{\Gamma}^T (\vec{k}_e - \vec{k}_a)$$

Nur die zum gestreuten Vektor \vec{k}_a senkrecht stehende Komponente $\dot{\vec{k}}_{a\perp}$ trägt zur Speckle-Wanderung in der Beobachtungsebene B bei - die zu \vec{k}_a parallel stehende Komponente $\dot{\vec{k}}_{a\parallel}$ erzeugt nur ein Kochen des Musters, d.h. das Speckle-Muster bleibt während seiner Bewegung nicht starr, sondern ändert seine Struktur (Auftauchen und Verschwinden von Leuchtflecken im Specklemuster). Die parallele Komponente führt somit zu einer Störung der Beobachtung der Specklewanderung und sollte durch einen geschickten geometrischen Aufbau reduziert werden (weiteres dazu in den folgenden Kapiteln).

Für die Specklewanderungsgeschwindigkeit in der Beobachtungsebene B bei Verwendung einer Linse mit der Brennweite f gilt dann der Ausdruck:

$$\vec{v}_s = f \frac{\dot{\vec{k}}_{a\perp}}{|\vec{k}_a|} \quad (2.10)$$

$$= -f \left[\hat{\Gamma}^T (\vec{e}_e - \vec{e}_a) \right]_{\perp} \quad (2.11)$$

mit $\vec{e}_e = \frac{\vec{k}_e}{|\vec{k}_e|}$ und $\vec{e}_a = \frac{\vec{k}_a}{|\vec{k}_a|}$.

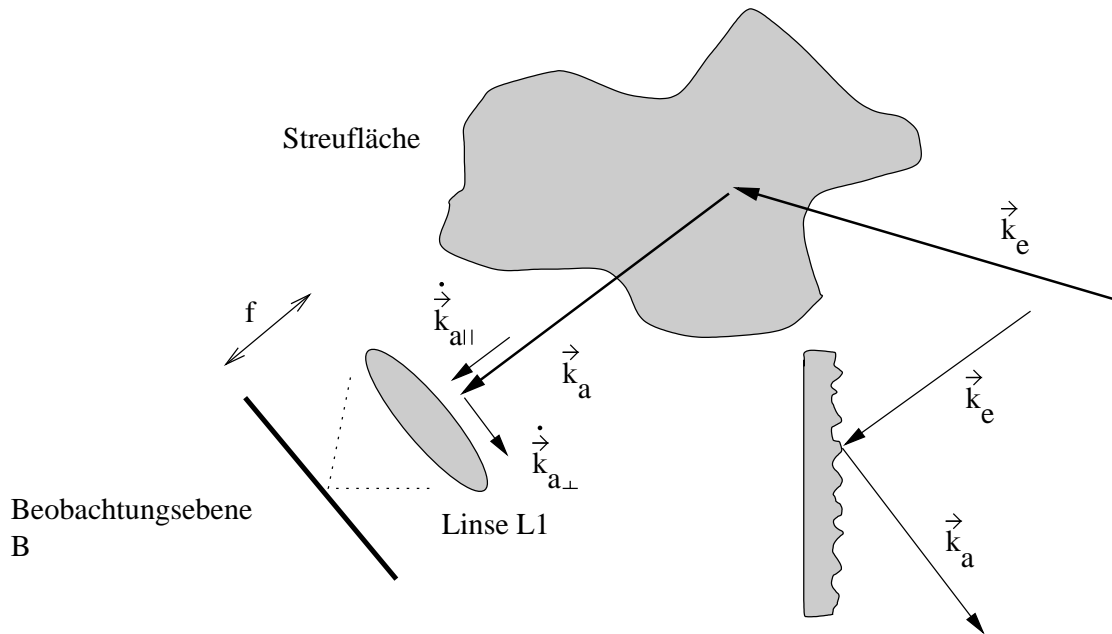


Abbildung 2.3: Kohärente Lichtstreuung an einer rauhen Oberfläche. Die Beobachtung des gestreuten Lichtes findet im Fernfeld durch die eingefügte Linse L1 statt. Die Beobachtungsebene B entspricht dabei der Brennebene der Linse.

Durch Messung der Mustergeschwindigkeit \vec{v}_s können jetzt Komponenten des Geschwindigkeitsgradiententensors oder einer Linearkombination dieser Komponenten (je nach Streugeometrie und Streuvektor \vec{q}) bestimmt werden.

Die Ergebnisse für statistisch verteilte Streuteilchen lassen sich direkt auf rauhe Oberflächen übertragen, nur mit dem Unterschied, daß die Streuzentren auf einer Fläche (näherungsweise eben) angeordnet sind (Abbildung 2.3).

Der Geschwindigkeitsgradiententensor setzt sich dann aus Rotation, Dehnung, Biegung und Scherung (Torsion) zusammen. Wie man aus Gleichung 2.7 sieht, hängt der Phasenfaktor aus Gleichung 2.3 - und somit das Specklebild - nur vom Geschwindigkeitsgradienten, nicht aber von der Geschwindigkeit \vec{v}_0 der Teilchen ab. Analog kann man Geschwindigkeiten von bewegten Oberflächen nicht in der Specklewanderung beobachten. Das Specklemuster ist praktisch unabhängig von der Struktur (Rauheit) der Oberfläche.

2.2 Täuschendes Musterwandern

Bisher wurde nur die zum gestreuten Vektor senkrechte Komponente der zeitlichen Ableitung des gestreuten Vektors für die Specklewanderung und deren Geschwindigkeit verantwortlich gemacht. Die parallele Komponente verursachte nur das Kochen des Musters. Es zeigt sich aber, daß man die Form der Kohärenzfläche bzw. des Kohärenzvolumens im Zusammenhang mit dem geometrischen Aufbau berücksichtigen muß, mit der Folge, daß auch die parallele Komponente einen nicht zu vernachlässigenden Einfluß auf die Specklewanderung ausübt (dieser

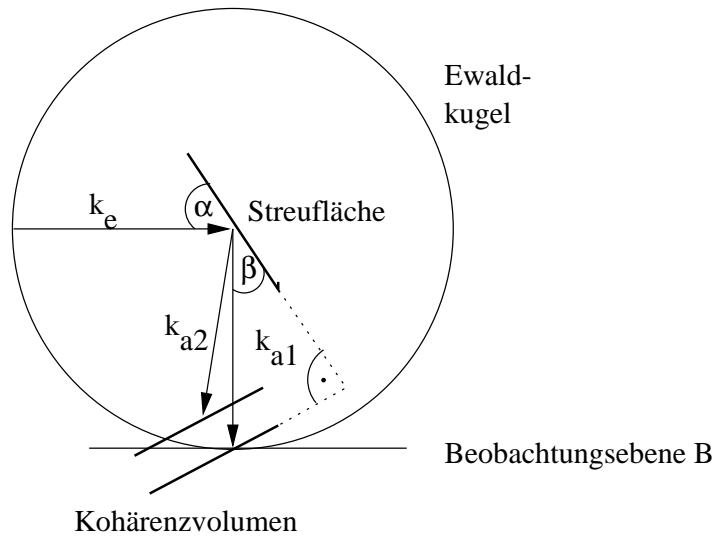


Abbildung 2.4: Sowohl der Streuvektor \vec{k}_{a1} als auch \vec{k}_{a2} sind in der Ebene B beobachtbar, obwohl \vec{k}_{a2} die Ewaldkugel nicht direkt schneidet.

kann sogar dominant werden).

Das Kohärenzvolumen bzw. die Kohärenzfläche beschreibt die Korrelation des Streulichtes an zwei Orten auf dem Beobachtungsschirm P_1 und P_2 , die durch die Streuvektoren \vec{q}_1 und \vec{q}_2 gegeben sind. Licht auf dem Beobachtungsschirm wird als noch kohärent angesehen, wenn die normierte Intensitätskorrelationsfunktion größer als $\frac{1}{2}$ ist. Hält man \vec{q}_1 fest, und variiert \vec{q}_2 mit der Bedingung, daß das in „Richtung \vec{q}_2 “ gestreute Licht gerade noch mit dem „ \vec{q}_1 -Licht“ kohärent ist, so beschreiben die Endpunkte von \vec{q}_2 eine Oberfläche im \vec{k} -Raum, die das sogenannte Kohärenzvolumen bilden. Die Schnittfläche diese Volumens mit der Ewaldkugel wird als Kohärenzfläche bezeichnet.

Die Form des Kohärenzvolumens hängt von der Form des Streuvolumens ab, welches hier auf eine Streuläche reduziert ist. Bei einer kreisförmigen Streuläche (Beleuchtung mit einem Laserstrahl) erhält man ein stabförmiges Kohärenzvolumen senkrecht zur Streuläche. In der Beobachtungsebene B sieht man dann die Schnittfläche des Kohärenzvolumens mit der Ewaldkugel. Durch die Linse im Strahlengang findet praktisch eine Fouriertransformation vom \vec{k} -Raum in den Ortsraum statt, d.h. eine Änderung des Streuvektors im \vec{k} -Raum ist direkt beobachtbar. Es sind aber nur gestreute Vektoren \vec{k}_a beobachtbar, die auf der Ewaldkugel liegen (in Abbildung 2.4 z.B. \vec{k}_{a1}). Jedoch auch dann, wenn der Vektor nicht mehr auf der Ewaldkugel liegt, kann dieser beobachtbar sein, nämlich genau dann, wenn das Kohärenzvolumen noch die Ewaldkugel schneidet (in Abbildung 2.4 Vektor \vec{k}_{a2}). Das stabförmige Kohärenzvolumen soll hier und für weitere Rechnungen durch eine Linie genähert werden.

Hat man nur eine rein senkrechte Wanderung ($\vec{k}_a \perp \vec{k}_a$), so ist der Einfluß der Form des Kohärenzvolumens und deren Orientierung zum Vektor \vec{k}_a auf die Specklewanderung bedeutungslos, wie dies in Bild 2.5 zu sehen ist. Die Schnittfläche des Kohärenzvolumens fällt mit \vec{k}_a zusammen. Wenn aber schiefes Wandern

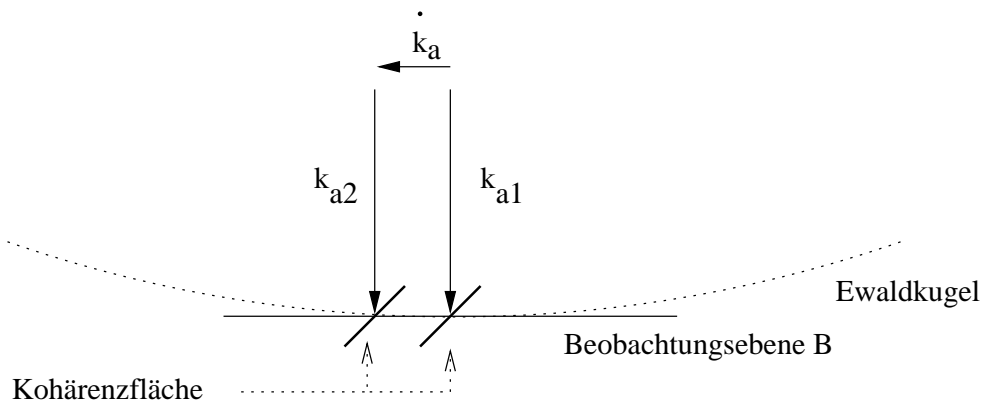


Abbildung 2.5: Senkrecht wandern von \vec{k}_a ($\dot{\vec{k}}_a = \dot{\vec{k}}_{a\perp}$)

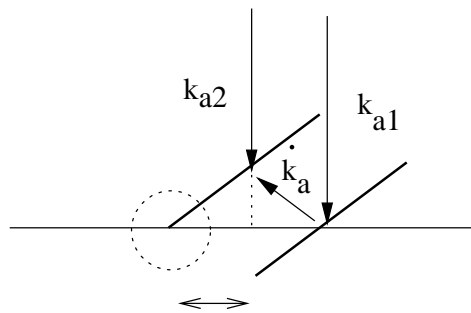


Abbildung 2.6: Schiefes wandern von \vec{k}_a ($\dot{\vec{k}}_a \neq \dot{\vec{k}}_{a\perp}$) durch eine zu \vec{k}_a parallele Komponente von $\dot{\vec{k}}_a$

von \vec{k}_a vorliegt ($\dot{\vec{k}}_a \neq \dot{\vec{k}}_{a\perp}$), verändert der Schnittpunkt des Kohärenzvolumens mit der Ewaldkugel die Specklewanderung (Abbildung 2.6). Tatsächlich sieht man in der Beobachtungsebene B eine größere (oder auch kleinere) Specklewanderungsgeschwindigkeit, als dies durch die Gleichung 2.11 zu erwarten gewesen wäre (Statt des Schnittpunktes von \vec{k}_{a2} sieht man den Schnittpunkt des Kohärenzvolumens mit der Ewaldkugel).

Für die Specklewanderungsgeschwindigkeit soll ein Korrekturfaktor eingeführt werden, der im folgenden berechnet wird. Aus Abbildung 2.7 kann man dazu die entsprechenden geometrischen Überlegungen entnehmen.

Die ursprüngliche Gleichung 2.11 für die Specklewanderungsgeschwindigkeit berücksichtigt nur die Wanderung des gestreuten Vektors \vec{k}_a entlang der Strecke s_x . Durch das schiefe wandern und einen Schnittpunkt des Kohärenzvolumens mit der Ewaldkugel ungleich dem durch \vec{k}_a beschriebenen vergrößert sich die Wanderung von \vec{k}_a in einer Zeiteinheit bezüglich der Beobachtungsebene B um die Strecke Δs_x ¹. Diese hängt mit der parallelen Komponente und dem Streuwinkel zusammen:

$$\Delta s_x = \dot{k}_{a\parallel} \tan^{-1} \beta$$

¹Bei einer Wanderung in entgegengesetzter Richtung erhält Δs_x ein negatives Vorzeichen

Die bedingte Wahrscheinlichkeit der beiden unkorrelierten statistischen Prozesse x und y ist das Produkt aus beiden Wahrscheinlichkeitsdichten und wird durch eine zweidimensionale **Gaußverteilung** beschrieben:

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad (2.20)$$

Die Amplitude eines Specklebildes an einem Punkt (x, y, z) in der Beobachtungsebene B ist eine Summe einer Vielzahl von (komplexen) Amplituden der gestreuten Lichtwellen $\frac{1}{\sqrt{N}}\tilde{a}_k(x, y, z)$ [2]:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(x, y, z) &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{a}_k(x, y, z) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N a_k e^{i\phi_k} \\ &= A_r + iA_i \end{aligned}$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit des Real- und Imaginärteils der komplexen Amplitude des Specklebildes $p(A_r, A_i)$ läßt sich wegen $\langle A_r \rangle = 0$ und $\langle A_i \rangle = 0$ durch Gleichung 2.20 ausdrücken. Mit

$$\begin{aligned} x \rightarrow A_r &\equiv \operatorname{Re}\{\tilde{A}\} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k a_k \cos \phi \\ y \rightarrow A_i &\equiv \operatorname{Im}\{\tilde{A}\} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k a_k \sin \phi \end{aligned}$$

erhält man für die Wahrscheinlichkeitsdichte eine **zweidimensionale Gaußverteilung**:

$$p(A_r, A_i) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{A_r^2 + A_i^2}{2\sigma^2}} \quad (2.21)$$

Die Intensität des Specklebildes in einem Punkt (x, y, z) ist $I(x, y, z) = |\tilde{A}(x, y, z)|^2 = A_r^2 + A_i^2$ und der Phasenwinkel $\Phi = \arctan \frac{A_i}{A_r}$. Im folgenden soll die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(A_r, A_i)$ in die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(I, \Phi)$ transformiert werden, da nur diese von Interesse ist.

Allgemein läßt sich eine Transformation von statistischen Variablen x_1, x_2 und y_1, y_2 schreiben als:

$$g(y_1, y_2) = f(x_1, x_2) |J|$$

$|J|$ ist dabei die Funktionaldeterminante der Transformation:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von der Intensität I und der Phase Φ läßt sich dann mit Gleichung 2.21 schreiben als:

$$p(I, \Phi) = p(A_r, A_i) \begin{vmatrix} \frac{\partial A_r}{\partial I} & \frac{\partial A_r}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial A_i}{\partial I} & \frac{\partial A_i}{\partial \Phi} \end{vmatrix}$$

Mit

$$\begin{aligned} A_r &= \sqrt{I} \cos \Phi \\ A_i &= \sqrt{I} \sin \Phi \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_r}{\partial I} &= \frac{1}{2\sqrt{I}} \cos \Phi, & \frac{\partial A_r}{\partial \Phi} &= -\sqrt{I} \sin \Phi \\ \frac{\partial A_i}{\partial I} &= \frac{1}{2\sqrt{I}} \sin \Phi, & \frac{\partial A_i}{\partial \Phi} &= \sqrt{I} \cos \Phi \\ \Rightarrow |J| &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ergibt sich schließlich für die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte von I und Φ :

$$p(I, \Phi) = \frac{1}{4\pi\sigma^2} e^{-\frac{I}{2\sigma^2}} \quad (2.22)$$

Da in obiger Gleichung 2.22 Φ nicht auftaucht, sind alle Werte $\Phi = 0 \dots 2\pi$ gleich wahrscheinlich, und die Wahrscheinlichkeitsdichte der Phase ist somit:

$$p(\Phi) = \frac{1}{2\pi}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Intensität erhält man durch Integration von Gleichung 2.22 über den Bereich $\Phi = 0 \dots 2\pi$:

$$\begin{aligned} p(I) &= \int_0^{2\pi} p(I, \Phi) d\Phi \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{I}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{\langle I \rangle} e^{-\frac{I}{\langle I \rangle}} \\ \text{mit } 2\sigma^2 &= \langle I \rangle \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Intensität eines Specklebildes folgt einer **negativen Exponentialverteilung**, wie sie in Abbildung 2.8 zu sehen ist. Die größte Wahrscheinlichkeit $p(I)$ besteht für die Intensität $I = 0$.

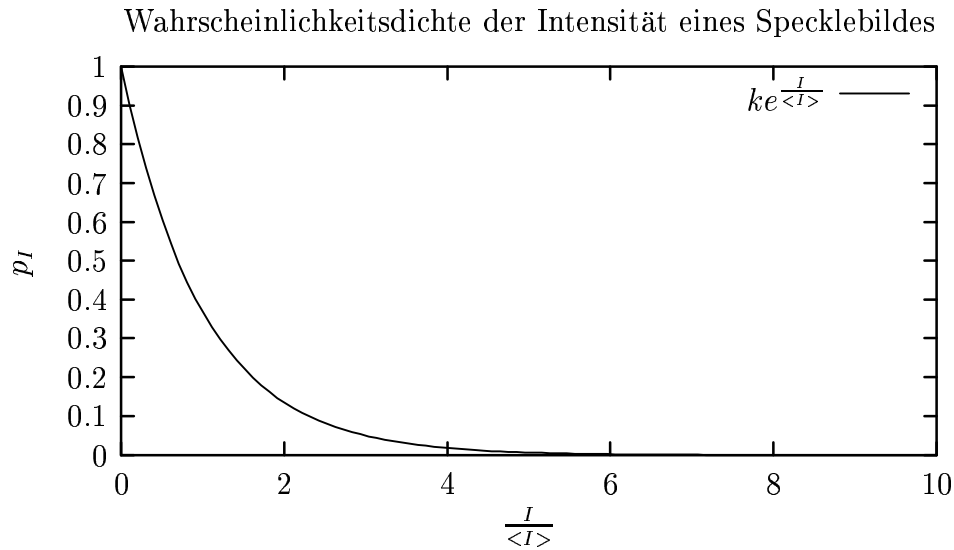


Abbildung 2.8: Negative Exponentialverteilung der Wahrscheinlichkeitsdichte der Intensität

2.4 Musterkochen

Während der Musterwanderung verändert sich die Struktur des Specklemusters. Leuchtflecken tauchen im Specklebild auf und verschwinden wieder - das Muster bleibt zeitlich nicht starr. Diesen Effekt bezeichnet man als Musterkochen oder „boiling“. Das Musterkochen führt zu einer erhöhten Streuung (Fehler) bei der Bestimmung der Specklewanderungsgeschwindigkeit (siehe Kapitel 6.4). Die Ursachen für das Musterkochen können sein:

1. Streupunkte treten in die Beleuchtungsfläche ein und wieder aus. Dadurch gehen Phasenbeziehungen zwischen den von den Streupunkten ausgesendeten Elementarwellen verloren, was zu einer Dekorrelation des Streulichtes führt [11].
2. Mehrfach- und Tiefenstreuung in teilweise lichtdurchlässigen Materialien (z.B. Papier, Gummi etc.). Durch zusätzliche Lichtstreuung in tieferen Schichten des Streumediums treten Phasenverschiebungen (die sich durch die Bewegung der Streupunkte ändern) zwischen den gestreuten Vektoren \vec{k}_a auf, die ebenfalls zu einer Dekorrelation des Specklebildes führen .

Die Stärke des Musterkochens ist proportional zur Kohärenzbreite d_k des Specklebildes [13]. Die Kohärenzbreite ist der mittlere Durchmesser eines Speckles. Nimmt die Kohärenzbreite zu, steigt das Musterkochen an, was gleichbedeutend mit einer Reduzierung der Streufläche $d_s \sim \frac{1}{d_k}$ (mittels Fokussierung der beleuchtenden Lichtwelle) ist. Mit abnehmender Streufläche steigt die Zahl der Streupunkte - relativ zur Gesamtzahl der Streupunkte in der Streufläche, die während der Bewegung der Streufläche in diese eintreten und sie wieder verlassen.

Um ein Maß für das Kochen zu bekommen, soll ein Parameter α eingeführt werden. Unter der Annahme, daß die Specklewanderungsgeschwindigkeit aus zwei

im zeitlichen Abstand τ_p aufgenommenen Specklebildern bestimmt wird, kann dieser Kochparameter als Verhältnis von der Kohärenzzeit des Specklebildes τ_c zum zeitlichen Abstand τ_p definiert werden:

$$\alpha = \frac{\tau_c}{\tau_p} \quad (2.23)$$

Die Kohärenzzeit τ_c ist durch die Kreuzkorrelation $z_{ab}(\tau)$ beider Bilder (siehe Kapitel 5) gegeben. τ_c ist die Zeit τ , bei der das Maximum der Kreuzkorrelation $z_{ab}(\tau_c)$ auf $\frac{1}{e}$ bezüglich der Kreuzkorrelation $z_{ab}(\tau = 0)$ bzw. der Autokorrelation z_{aa} oder z_{bb} abgefallen ist.

Nach [13] kann man die Kohärenzzeit des Specklemusters näherungsweise durch das Verhältnis des Durchmessers der Streufläche d_s zur Geschwindigkeit v , mit der sich die **Streuteilchen** bewegen, darstellen:

$$\tau_c \approx \frac{d_s}{2v}$$

Wenn $\alpha = 0$ ist, liegt reines Kochen des Musters vor und es findet keine Translation statt. Ist $\alpha = \infty$ führt das Specklemuster eine reine Translationsbewegung durch, ohne das sich dabei die Struktur des Specklemusters ändert. Im Bereich $0 \leq \alpha \leq 1$ dominiert das Kochen des Musters, ist $\alpha \gg 1$ dominiert die Translation des Specklemusters. Dies ist der Fall, wenn die Kohärenzbreite des Bildes und die Geschwindigkeit der Streuteilchen klein ist.

Der Effekt des Musterkochens gewinnt mit zunehmender Specklewanderungsgeschwindigkeit v_s immer mehr an Bedeutung. Näheres dazu findet sich im Kapitel 6.

Kapitel 3

Der Geschwindigkeitsgradienten- tensor

3.1 Rotation

Es wird eine rotierende Scheibe betrachtet (siehe Abbildung 3.1). Die Winkelgeschwindigkeit sei ω . Die Rotationsachse liege auf der Z-Achse. Zur Berechnung der Geschwindigkeiten und deren Gradienten werden Polarkoordinaten benutzt:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\y &= r \sin \varphi \\ \varphi &= \omega t\end{aligned}$$

Man erhält dann für die Geschwindigkeiten

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

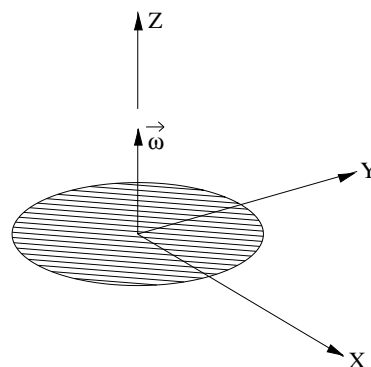


Abbildung 3.1: Rotierende Scheibe in der x-y-Ebene mit Rotationsachse parallel zur z-Achse

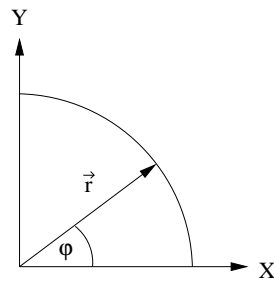


Abbildung 3.2: Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
 &= r\omega \sin \varphi \\
 &= \omega y \\
 v_y &= \frac{dy}{dt} \\
 &= -r\omega \cos \varphi \\
 &= -\omega x
 \end{aligned}$$

Daraus lassen sich zwei nicht verschwindende Geschwindigkeitsgradientenkomponenten ableiten:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \omega \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = -\omega \quad (3.2)$$

Da $v_z = 0$ lautet der Geschwindigkeitsgradiententensor:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

mit

$$\Gamma_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial u_j} \quad (3.4)$$

und $v_i = v_x, v_y, v_z$ $u_j = x, y, z$.

3.2 Dehnung

Es wird die Dehnung eines flachen, elastischen Körpers (Gummiband) in X-Richtung betrachtet (Abbildung 3.3). Um den Geschwindigkeitsgradiententensor berechnen zu können wird von der Näherung Gebrauch gemacht, daß die

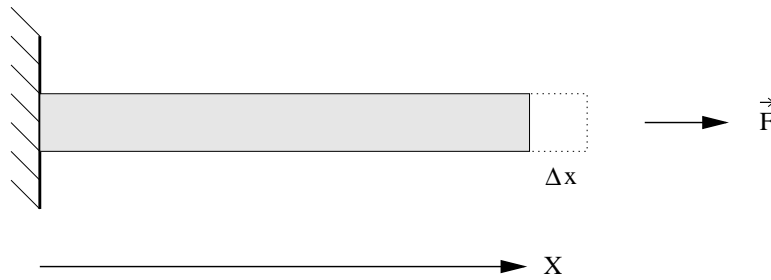


Abbildung 3.3: Dehnung eines flachen, elastischen Körpers um Δx durch die Kraft F .

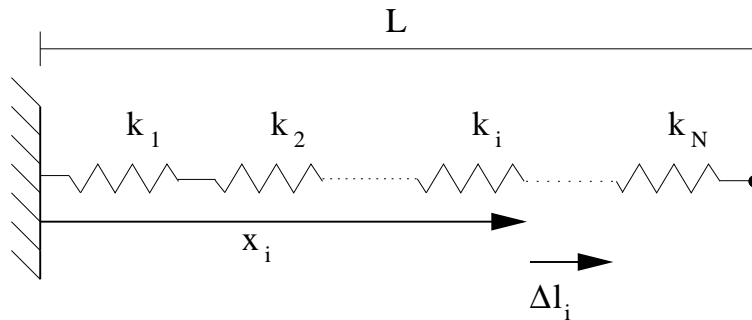


Abbildung 3.4: Zerlegung eines elastischen Körpers (eindimensional) in eine Serienschaltung von N Federn mit den Federkonstanten $k_i = \frac{1}{kN}$.

Dehnung im linearen Bereich stattfindet und eindimensional ist. Das Hooke'sche Gesetz ist dann anwendbar.

Wird auf eine Feder eine Kraft ausgeübt, so führt diese zu einer Dehnung in Richtung der Kraft:

$$\vec{F} = k\vec{x}$$

Ein elastischer Körper kann durch eine Zerlegung in mehrere Federn mit den Kraftkonstanten k_i modelliert werden. Dazu soll Abbildung (3.4) betrachtet werden. Wenn k die Federkonstante des gesamten Körpers ist, so gilt bei Zerlegung in N Federn bei einer Änderung der Zugkraft um ΔF für die Dehnung Δl_i bei der i -ten Feder am Ort x_i :

$$\begin{aligned} \Delta F &= \left(\sum_{j=1}^i \frac{1}{kN} \right)^{-1} \Delta l_i \\ &= \frac{kN}{i} \Delta l_i \\ &= \frac{kL}{x_i} \Delta l_i \end{aligned}$$

Dabei ist $L = N\Delta x$ die Länge des elastischen Körpers und $x_i = i\Delta x$.

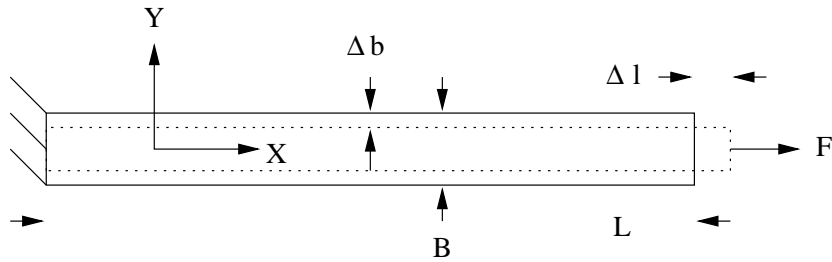


Abbildung 3.5: Berücksichtigung der bei der Dehnung Δl auftretenden Querkontraktion Δb .

Die Kraft F soll sich nun proportional zur Zeit ändern (linear). Die Geschwindigkeit am Endpunkt des elastischen Körpers ist $v_d = \text{const}$:

$$\begin{aligned} F_x &= k d \\ &= k v_d t \end{aligned}$$

Für die Dehnung Δl_i am Ort x_i bekommt man dann den Ausdruck:

$$\begin{aligned} \Delta l_i &= k v_d \Delta t \frac{x_i}{kL} \\ &= v_d \Delta t \frac{x_i}{L} \end{aligned}$$

Durch den Grenzübergang $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = v_x$ und $N \rightarrow \infty$ erhält man die Geschwindigkeit v_x am Ort x

$$v_x = v_d \frac{x}{L}$$

für $x = 0 \dots L$.

Mittels räumlicher Ableitung ergibt sich schließlich

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{v_d}{L} \quad (3.5)$$

Als nächstes soll die bei der Dehnung des Körpers auftretende Querkontraktion berücksichtigt werden. Die entsprechenden geometrischen Vereinbarungen lassen sich aus Abbildung (3.5) entnehmen. Es tritt Dehnung in x-Richtung und Kontraktion in y-Richtung auf:

$$e_y = \frac{2\Delta b}{B} \quad e_x = \frac{\Delta l}{L}$$

Zusammenhang von e_x mit e_y für isotropes Material:

$$e_y = -\nu e_x$$

wobei ν die Querkontraktionszahl (0.2 ... 0.7 -materialspezifisch) ist.

Für die Breitenänderung Δb erhält man dann:

$$\Delta b = -\nu \frac{\Delta l}{2L} B$$

Analog zu obigen Rechnungen der Dehnung kann man die Geschwindigkeit in y -Richtung v_y am Ort y berechnen:

$$v_y = v_b \frac{2y}{B}$$

Die Geschwindigkeit $v_b = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta b}{\Delta t}$ hängt direkt mit v_d der Dehnung zusammen:

$$v_b = -\nu v_d \frac{B}{2L}$$

Eingesetzt in v_y :

$$v_y = -\nu v_d \frac{y}{L} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\nu \frac{v_d}{L} \quad (3.7)$$

Der gesamte Geschwindigkeitsgradiententensor besteht dann aus zwei nicht verschwindenden Komponenten:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{v_d}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{v_d}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Eine Tiefenkontraktion würde noch eine zusätzliche Komponente $\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\nu \frac{v_d}{L}$ liefern.

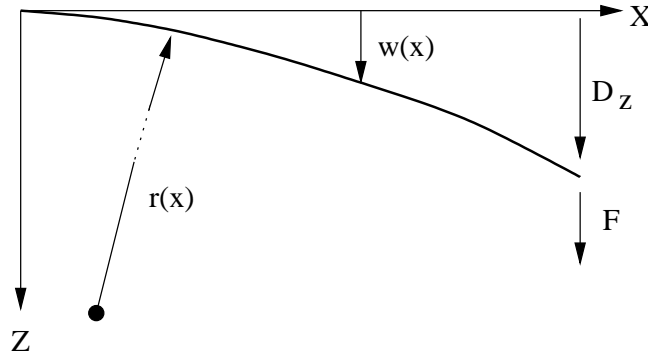
3.3 Biegung

Ein elastischer Körper (Abbildung 3.6), der einer Biegekraft in Z -Richtung ausgesetzt ist, soll durch Reduktion auf eine Linie (die neutrale Faser des Körpers) genähert werden - Dehnung und Kontraktion werden somit vernachlässigt. Um die einzelnen Komponenten des Geschwindigkeitsgradiententensors bestimmen zu können, muß die Biegelinie in Abhängigkeit von der Auslenkung D_z bestimmt werden. Dazu muß der Zusammenhang zwischen dem Krümmungsradius $r(x)$ und der Biegelinie ermittelt werden.

Ein Kreis mit dem Radius r hat die allgemeine Form:

$$r^2 = (x - a)^2 + (z - b)^2$$

Einfache und zweifache Ableitung nach x liefert:

Abbildung 3.6: Biegelinie $w(x)$ in Abhängigkeit von der Auslenkung D_z .

$$0 = (x - a) + \frac{dz}{dx}(z - b) \quad (3.9)$$

$$0 = 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + (z - b)\frac{d^2z}{dx^2} \quad (3.10)$$

Aus (3.9) und (3.10) und aufgelöst nach x und z ergibt sich:

$$x - a = \frac{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{\frac{d^2z}{dx^2}} \frac{dz}{dx}$$

$$z - b = -\frac{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{\frac{d^2z}{dx^2}}$$

Eingesetzt in die Kreisgleichung mit $w(x) = z(x)$ liefert den Krümmungsradius der Biegelinie am Ort x :

$$r(x) = \frac{\left(1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2w}{dx^2}}$$

Bei kleinen Verschiebungen ist $\frac{dw}{dx} \ll 1$ und obige Gleichung vereinfacht sich zu

$$r(x) = \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^{-1} \quad (3.11)$$

Nach [4] steht der Krümmungsradius mit dem Biegemoment $M_y(x)$ in folgender Beziehung:

$$r(x) = \frac{EI_y(x)}{M_y(x)} \quad (3.12)$$

Dabei ist E das Elastizitätsmodul und I_y das axiale Flächenmoment. Es soll hier $EI = c_0^{-1} = \text{const}$ sein[4]. Ist das eine Ende des elastischen Körpers eingespannt und wirkt auf das andere Ende eine Kraft F_z in Z -Richtung, so gilt für das Biegemoment:

$$M(x) = -F(L - x)$$

mit L als Länge des Körpers in X-Richtung.

Setzt man (3.11) mit (3.12) gleich und integriert zweimal so erhält man die Biegelinie $w(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx^2} &= -\frac{M(x)}{EI} \\ &= -c_0 M(x) \\ &= c_0 F(L - x) \\ \frac{dw}{dx} &= c_0 F(Lx - \frac{x^2}{2}) + c_1 \\ w(x) &= c_0 F(\frac{L}{2}x^2 - \frac{x^3}{6}) + c_1 + c_2 \end{aligned}$$

Aus den Randbedingungen $w'(x = 0) = 0$ und $w(x = 0) = 0$ folgt $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$.

Weiterhin ist bei kleinen Biegungen die Auslenkung $D_z = w(L)$ und die auslenkende Kraft F ist proportional zur Auslenkung D_z , so daß man schließlich die Funktion der Biegelinie in Abhängigkeit von der Auslenkung erhält:

$$w(x) = \frac{3D_z}{L^3} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \quad (3.13)$$

Im nächsten Schritt müssen die Geschwindigkeitsgradientenkomponenten $\frac{\partial v_z}{\partial x}$ und $\frac{\partial v_x}{\partial z}$ bestimmt werden. Dazu soll die Biegung durch eine ortsabhängige Rotation beschrieben werden.

Es wird ein Linienelement dl am Ort x der ausgelenkten Biegelinie betrachtet. Dieses Linienelement soll durch die Tangente der Biegelinie an diesem Ort ersetzt werden. Die Abbildung (3.7) verdeutlicht diese Überlegung. Der Winkel des Linienelements mit der X-Achse ist ϕ . Ändert sich nun die Auslenkung D_z so führt dies zu einer Änderung des Winkels ϕ . Da eine Translation keinen Geschwindigkeitsgradienten verursacht, muß nur eine Rotation des Linienelements mit dem Winkel $\phi_1 - \phi_2 = \Delta\phi$ berücksichtigt werden, vorausgesetzt, es tritt keine Krümmung des Linienelements auf, was hier ja angenommen wird. Der Winkel ϕ ist durch die Krümmung der Biegelinie gegeben:

$$\tan \phi = w'(x) = \frac{dz}{dx}$$

Die Krümmung der Biegelinie ist dann:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{3D_z}{L^3} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

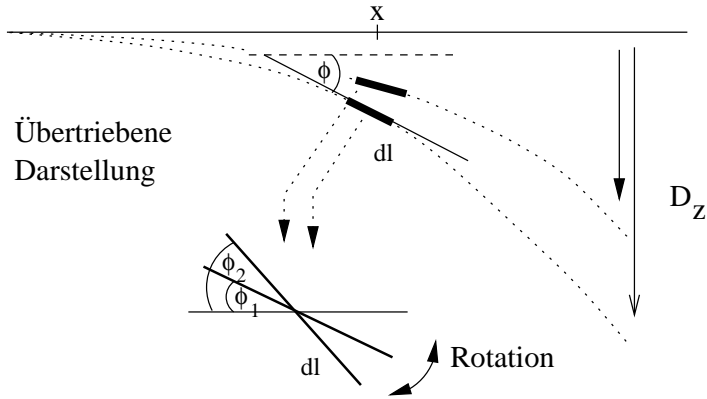


Abbildung 3.7: Rückführung der Biegung auf eine ortsabhängige Rotation um den Winkel $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ durch Näherung der Biegelinie am Ort x mit einem Linienelement dl , dessen Steigung gleich der Steigung der Tangente der Biegelinie an diesem Ort ist.

Durch zeitliche Ableitung erhält man direkt die Geschwindigkeitsgradientenkomponente

$$\frac{\partial v_z}{\partial x} = u' = \frac{3v_d}{L^3} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) \quad (3.14)$$

v_d ist die Geschwindigkeit des Endpunktes der Biegelinie $w(L)$ in Z-Richtung (Näherung für kleine Auslenkungen).

Da hier die Biegung als Rotation genähert wurde, ist die transponierte Komponente zu $\frac{\partial v_z}{\partial x}$ gerade (siehe Kapitel 3.1):

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{\partial v_z}{\partial x} = v' = -\frac{3v_d}{L^3} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) \quad (3.15)$$

Würde man noch Dehnung bzw. Stauchung (d.h. Krümmung vom Linienelement dl) berücksichtigen, hätte man eine zusätzliche Komponente $\frac{\partial v_x}{\partial x} = w'$ (die im allgemeinen vernachlässigbar klein ist), und der gesamte Geschwindigkeitsgradiententensor lautet dann:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} w' & 0 & v' \\ 0 & 0 & 0 \\ u' & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Kapitel 4

Mustergeschwindigkeit und Gradient

In diesem Kapitel soll das Musterwandern bei Anwesenheit verschiedener Gradientenkomponenten der Rotation, der Dehnung und der Biegung bei einer gezielt gewählte Streugeometrie beschrieben und berechnet werden. Die in Kapitel 3 berechneten Gradientenkomponenten werden für die weiteren Berechnungen herangezogen.

4.1 Rotation

Es soll der Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit des Specklemusters, die in der Beobachtungsebene B gemessen wird, und dem Geschwindigkeitsgradient gezeigt werden.

Für die weiteren Rechnungen wird immer im System des Gradienten - also der bewegenden Oberfläche - gearbeitet (Abbildung 4.1). Die Geschwindigkeit \vec{v}_s bezieht sich natürlich auf das System des Lichtes (gestrichenes Koordinatensystem).

Die zeitliche Ableitung des gestreuten Vektors ergibt sich aus dem Geschwindigkeitsgradiententensor und dem Streuvektor \vec{q} :

$$\dot{\vec{k}}_a = -\Gamma^T \vec{q} \quad (4.1)$$

$$\vec{q} = (\vec{k}_e - \vec{k}_a) \quad (4.2)$$

Den Geschwindigkeitsgradiententensor der Rotation eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{k}}_a &= - \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega q_y \\ -\omega q_x \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

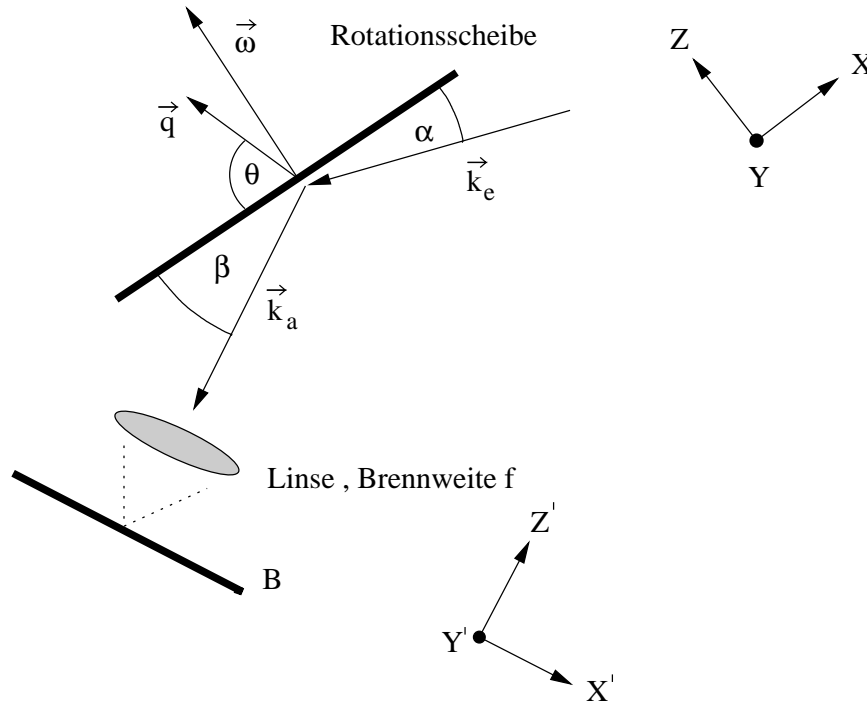


Abbildung 4.1: Streugeometrie für die Rotationsmessung der Gradientenkomponente $\frac{\partial v_y}{\partial x}$. Das gestrichelte Koordinatensystem $(X'Y'Z')$ wird durch das System des Lichtes, das ungestrichelte (XYZ) durch das System des Gradienten bestimmt.

Als nächstes muß die Komponente von $\dot{\vec{k}}_a$ bestimmt werden, die senkrecht auf dem gestreuten Vektor \vec{k}_a steht. Da der Streuvektor \vec{q} in der xz -Ebene liegt, ist die Komponente q_y gleich Null und somit die x -Komponente von $\dot{\vec{k}}_{a\perp}$ auch. Die y -Komponente von \vec{k}_a steht gerade senkrecht auf dem gestreuten Vektor \vec{k}_a (da $y' = y$) und ist somit gleich der y -Komponente von $\dot{\vec{k}}_{a\perp}$; eine parallele Komponente existiert somit nicht.

Man erhält also:

$$\dot{\vec{k}}_{a\perp} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega q_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Im nächsten Schritt muß q_x bestimmt werden. Abbildung 4.1 kann man die erforderlichen geometrischen Größen entnehmen.

Da $|k_a| = |k_e| = k$ erhält man für q :

$$q = -\sqrt{2} k \sqrt{1 + \cos(\alpha + \beta)}$$

Für q_x ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} q_x &= q \cos \theta \\ &= \sqrt{2} k \sqrt{1 + \cos(\alpha + \beta)} \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \end{aligned}$$

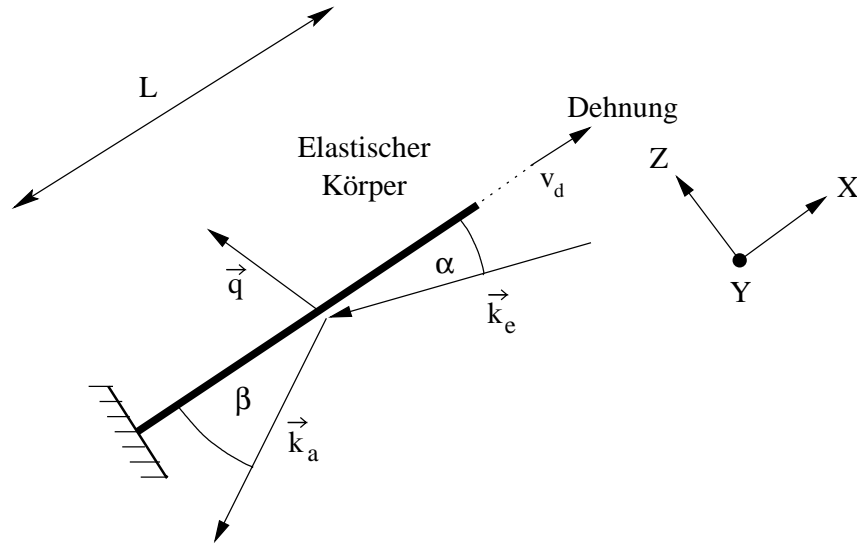


Abbildung 4.2: Streugeometrie zur Dehnungsmessung der Gradientenkomponente $\frac{\partial v_x}{\partial x}$.

Da nur die y -Komponente von $\dot{\vec{k}}_{a\perp} \neq 0$ ist, gibt es auch nur eine Geschwindigkeitskomponente $v_{y'} \neq 0$ des Specklewanderns in der Beobachtungsebene B und mit Gleichung 2.11 folgt:

$$v_{y'} = \sqrt{2} f \omega \sqrt{1 + \cos(\alpha + \beta)} \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (4.3)$$

und $v_{x'} = 0$.

Kennt man hingegen die Specklewanderungsgeschwindigkeit und will den Gradienten berechnen, so läßt sich obige Gleichung umstellen zu:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{v_{y'}}{\sqrt{2} f \sqrt{1 + \cos(\alpha + \beta)} \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)} \quad (4.4)$$

Für die in dieser Arbeit häufig verwendete Geometrie $\alpha + \beta = 90^\circ$ entfällt der Wurzelausdruck $\sqrt{1 + \cos(\alpha + \beta)}$.

4.2 Dehnung

Die Specklewanderungsgeschwindigkeit für die Dehnungsmessung wird in analoger Weise wie bei der Rotation bestimmt. Es wird ein geometrisch ähnlicher Aufbau benutzt - siehe Bild (4.2). Es muß wieder die zeitliche Ableitung des gestreuten Vektors $\dot{\vec{k}}_a$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{k}}_a &= -\Gamma^T \vec{q} \\ &= - \begin{pmatrix} \frac{v_d}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{v_d}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

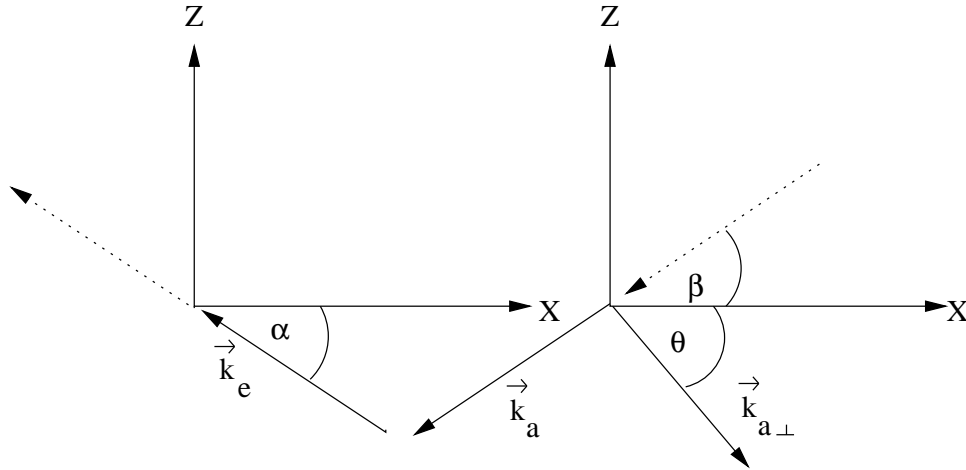


Abbildung 4.3: Koordinatentransformation: System des Lichtes ($X'Y'Z'$)
 \rightarrow System des Gradienten (XYZ)

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} -\frac{v_d}{L} q_x \\ \nu \frac{v_d}{L} q_y \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{v_d}{L} q_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad da \quad q_y = 0
 \end{aligned}$$

Mit dieser geometrischen Anordnung kann man somit nur die Längsdehnung, aber nicht die Querkontraktion messen.

Für die Speckle-Wanderungsgeschwindigkeit in der Beobachtungsebene wird wieder die zu \vec{k}_a senkrechte Komponente benötigt. Der einfache geometrische Zusammenhang wie bei der Rotation ist hier nicht vorhanden. Um diesen nun bestimmen zu können, sollen hier die Vektoren \vec{k}_e und \vec{k}_a im System des Lichtes ($X'Y'Z'$) auf das Gradientensystem (XYZ) transformiert werden - analog für die dazu senkrechten Vektoren (siehe Abbildung 4.3). \vec{k}_e im System des Gradienten:

$$\vec{k}_e = k_e \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

\vec{k}_a im System des Gradienten:

$$\vec{k}_a = k_a \begin{pmatrix} -\cos \beta \\ 0 \\ -\sin \beta \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Ein senkrechter Vektor zu \vec{k}_a ist dann:

$$\vec{k}_{a\perp} = k_a \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ 0 \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

$$= k_a \begin{pmatrix} \sin \beta \\ 0 \\ -\cos \beta \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

$$\Rightarrow \vec{e}_{a\perp} = \begin{pmatrix} \sin \beta \\ 0 \\ -\cos \beta \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Der Streuvektor \vec{q} ist dann einfach:

$$\vec{q} = \vec{k}_e - \vec{k}_a \quad (4.10)$$

$$= k \begin{pmatrix} \cos \beta - \cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha + \sin \beta \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Die zu \vec{k}_a senkrechte Komponente von \vec{k}_a erhält man aus der Gleichung

$$\dot{k}_{a\perp} = \dot{\vec{k}}_a \vec{e}_{a\perp} \quad (4.12)$$

$$= -\frac{kv_d}{L} (\cos \beta - \cos \alpha) \sin \beta \quad (4.13)$$

Unter Verwendung von (6.17) ist schließlich die Specklewanderungsgeschwindigkeit in x' -Richtung:

$$v_{x'} = -\frac{fv_d}{L} (\cos \beta - \cos \alpha) \sin \beta \quad (4.14)$$

Im Gegensatz zur Rotationsanordnung liegt hier schiefes Wandern von \vec{k}_a vor ($\dot{\vec{k}}_{a\parallel} \neq 0$). Deshalb muß der Korrekturfaktor s_k (Gleichung 2.13) berechnet werden. Dazu wird zusätzlich zur Komponente $\dot{\vec{k}}_{a\perp}$ (Gleichung 4.13) die Komponente $\dot{\vec{k}}_{a\parallel}$ benötigt:

$$\dot{k}_{a\parallel} = \dot{\vec{k}}_a \vec{e}_{a\parallel} \quad (4.15)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{v_d}{L} q_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \beta \\ 0 \\ -\sin \beta \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

$$= \frac{v_d}{L} (\cos \beta - \cos \alpha) \cos \beta \quad (4.17)$$

Eingesetzt in Gleichung (2.13) folgt direkt:

$$s_k = \frac{\cos \beta \tan^{-1} \beta + \sin \beta}{\sin \beta} \quad (4.18)$$

$$= 1 + \tan^{-2} \beta \quad (4.19)$$

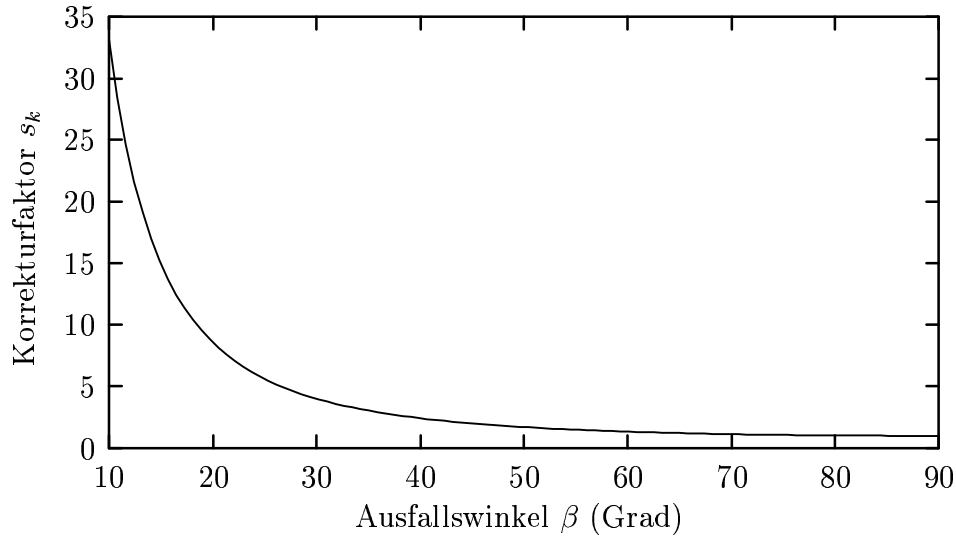


Abbildung 4.4: Einfluß des schiefen Wanderns von \vec{k}_a auf die Specklewanderung (bei $s_k = 1$ nur senkrecht wandern).

Das schiefe Wandern von \vec{k}_a (und somit der Korrekturfaktor) kann die Specklewanderungsgeschwindigkeit erheblich beeinflussen, je nach Größe des Streuwinkels β , wie Diagramm 4.4 zeigt. Die korrigierte Specklewanderungsgeschwindigkeit ist somit:

$$v_{x'}^s = v_{x'} s_k = -\frac{f v_d}{L} (\cos \beta - \cos \alpha) (1 + \tan^{-2} \beta) \sin \beta \quad (4.20)$$

Umgeformt nach der zu messenden Gradientenkomponente in Abhängigkeit von der Specklewanderungsgeschwindigkeit erhält man:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{v_{x'}^s}{f (\cos \beta - \cos \alpha) (1 + \tan^{-2} \beta) \sin \beta} \quad (4.21)$$

Will man das schiefe Wandern von \vec{k}_a unterbinden, muß man einen geometrischen Aufbau (Abbildung 4.5) wählen, bei dem die parallele Komponente $\vec{k}_{a\parallel}$ verschwindet. Dies ist der Fall, wenn der Ausfallswinkel β gerade 90 Grad beträgt. Dann reduziert sich die Specklewanderungsgeschwindigkeit auf einen einfachen Ausdruck:

$$v_{x'} = \frac{f v_d}{L} \cos \alpha \quad (4.22)$$

Um den Geschwindigkeitsgradienten aus der Geschwindigkeit berechnen zu können, formt man obige Gleichung um zu:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{v_{x'}}{f \cos \alpha}$$

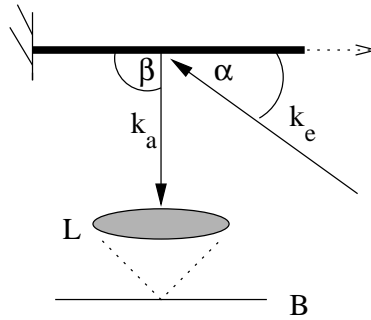


Abbildung 4.5: Streugeometrie für die Dehnungsmessung, bei der nur senkrecht Wanderung von \vec{k}_a auftritt ($\beta = 90^\circ$).

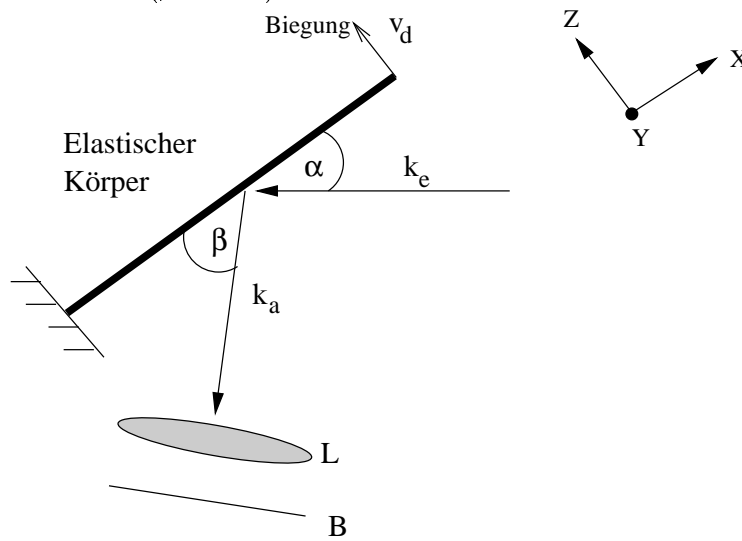


Abbildung 4.6: Streugeometrie zur Biegemessung der Gradientenkomponente $\frac{\partial v_z}{\partial x}$.

4.3 Biegung

Auch für die Biegung wird wieder die schon bekannte Streugeometrie (Abbildung 4.6) benutzt. Die zeitliche Ableitung des gestreuten Vektors \vec{k}_a ist mit Gleichung 4.11:

$$\dot{\vec{k}}_a = -\Gamma^T \vec{q} \quad (4.23)$$

$$= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & u' \\ 0 & 0 & 0 \\ v' & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta - \cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha + \sin \beta \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

$$= \begin{pmatrix} -u'(\sin \alpha + \sin \beta) \\ 0 \\ -v'(\cos \beta - \cos \alpha) \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

mit

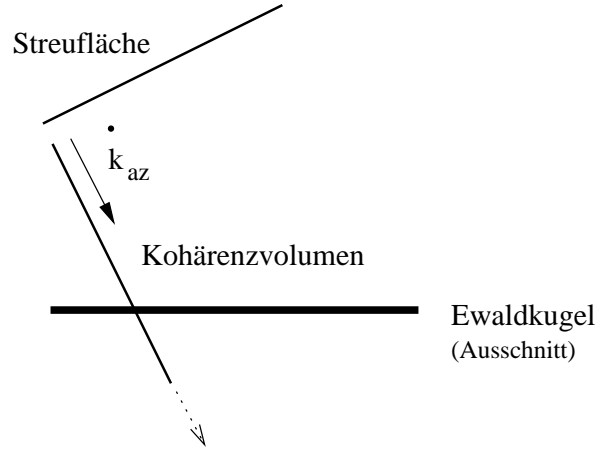


Abbildung 4.7: Die z -Komponente \vec{k}_{az} ist immer parallel zum Kohärenzvolumen, und verursacht deshalb **keine** Specklewanderung.

$$\begin{aligned} u' &= \frac{3v_d}{L^3} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) \\ v' &= -u' \end{aligned}$$

Auch hier liegt wieder schiefes Wandern von \vec{k}_a vor. Es zeigt sich durch eine einfache Überlegung, daß die z -Komponente von \vec{k}_a überhaupt nicht meßbar ist. Denn diese z -Komponente ist immer parallel zur Kohärenzfläche, die senkrecht auf der Streufläche steht, also parallel zur z -Achse, mit der Folge, daß eine Wanderung von \vec{k}_a in z -Richtung überhaupt keine Wanderung der Speckles in der Beobachtungsebene B erzeugt (Abbildung 4.7). Die zu \vec{k}_a senkrechte Komponente läßt sich dann mit Gleichung 4.25 und 4.9 schreiben als:

$$\begin{aligned} \dot{k}_{a\perp} &= \dot{k}_a \vec{e}_{a\perp} \\ &= -u' (\sin \alpha + \sin \beta) \sin \beta \end{aligned}$$

Der Korrekturfaktor der schiefen Wanderung für die Specklewanderungsgeschwindigkeit ist durch Gleichung (4.19) gegeben, so daß man für die Specklewanderungsgeschwindigkeit den Ausdruck

$$v_{x'}^s = \frac{3fv_d}{L^3} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) (\sin \alpha + \sin \beta) (1 + \tan^{-2} \beta) \sin \beta \quad (4.26)$$

erhält.

Die entsprechende Gradientenkomponente läßt sich aus der Specklewanderungsgeschwindigkeit berechnen:

$$\frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{v_{x'}^s}{f (\sin \alpha + \sin \beta) (1 + \tan^{-2} \beta) \sin \beta} \quad (4.27)$$

Um die parallele Komponente von $\dot{\vec{k}}_a$ zu vermeiden, muß wieder der Aufbau von Abbildung 4.5 benutzt werden, so daß $\beta = 90^\circ$. Die Specklewanderungsgeschwindigkeit reduziert sich dann zu:

$$v_{x'} = \frac{3fv_d}{L^3} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) (1 + \sin \alpha) \quad (4.28)$$

Aufgelöst nach der zu messenden Geschwindigkeitsgradientenkomponente erhält man:

$$\frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{v_{x'}}{f(1 + \sin \alpha)} \quad (4.29)$$

Die während der Biegung auftretende Änderung der Streugeometrie - d.h. Änderung des Einfallswinkels und Ausfallswinkels - soll als vernachlässigbar klein gelten (kleine Auslenkung D_z). Hat man jedoch schon eine statische Vorbiegung des elastischen Körpers mit der Auslenkung D_v , die nicht mehr vernachlässigbar ist, wird der Einfallswinkel α und der Ausfallswinkel β abhängig von der statischen Auslenkung und vom Ort x entlang der Biegelinie:

$$\alpha(x) = \alpha + \phi(x) \quad (4.30)$$

$$\beta(x) = \beta + \phi(x) \quad (4.31)$$

$$\text{mit } \phi(x) = \arctan w_s(x) \quad (4.32)$$

$$\text{und } w_s(x) = \frac{3D_v}{L^3} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) \quad (4.33)$$

Kapitel 5

Kreuzkorrelationsfunktion

Wesentlicher Bestandteil dieser Arbeit ist die Bestimmung der Specklewandergeschwindigkeit v_s . Zur Bestimmung der Musterwanderung stehen zwei im zeitlichen Abstand τ aufgenommene Specklebilder zur Verfügung. Die Specklemuster in beiden Bildern sind relativ zueinander verschoben. Ziel ist die Bestimmung dieser Verschiebung. Es ist wenig sinnvoll, die Verschiebung beispielsweise aufgrund des Abstandes einer besonders markanten Stelle im Muster zu bestimmen, da das Specklemuster während der Bewegung nicht starr bleibt (Musterkochen, siehe Kapitel 2.4). Deutlich genauere Ergebnisse erzielt man durch die Korrelation der Intensitätsverläufe der Specklebilder.

Aus den Eigenschaften der sogenannten Kreuzkorrelationsfunktion kann dann die Verschiebung zweier Specklebilder relativ zueinander ermittelt werden. Im folgenden soll die Kreuzkorrelationsfunktion näher betrachtet werden.

5.1 Kontinuierliche Signale

Gegeben seien zwei ortsabhängige Signale $g(x)$ und $h(x)$.

Die Kreuzkorrelation zwischen den beiden Signalen wird durch die Funktion

$$z(\alpha) = g(x) \circ h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(\alpha + x)dx \quad (5.1)$$

gegeben. α ist eine Verschiebung der beiden Signale relativ zueinander in x-Richtung.

Es soll nun gezeigt werden, daß man die Kreuzkorrelationsfunktion in eleganter Weise über die Fouriertransformation ausdrücken kann.

Dazu wird zuerst die Fouriertransformierte von $g(x)$ gebildet:

$$G(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-i2\pi kx} dx \quad (5.2)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cos(2\pi kx) dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \sin(2\pi kx) dx \quad (5.3)$$

$$= \Re(k) - i\Im(k) \quad (5.4)$$

Weiterhin muß die Fouriertransformierte von $z(\alpha)$ gebildet werden:

$$Z(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(\alpha) e^{-i2\pi k\alpha} d\alpha \quad (5.5)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) h(x + \alpha) dx \right] e^{-i2\pi k\alpha} d\alpha \quad (5.6)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(x + \alpha) e^{-i2\pi k\alpha} d\alpha \right] dx \quad (5.7)$$

Um das zweite Integral in der letzten Zeile berechnen zu können, muß man die Substitution $\sigma = x + \alpha$ durchführen:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma) e^{-i2\pi kx(\sigma-x)} d\sigma \\ &= e^{i2\pi kx} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma) e^{-i2\pi k\sigma} d\sigma \\ &= e^{i2\pi kx} H(k) \end{aligned}$$

Einsetzen in voriges Integral (Gleichung 5.7) liefert:

$$Z(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{i2\pi kx} H(k) dx \quad (5.8)$$

$$= H(k) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cos(2\pi kx) dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \sin(2\pi kx) dx \right] \quad (5.9)$$

$$= H(k) [\Re(k) + i\Im(k)] = H(k) G^*(k) \quad (5.10)$$

Der Vergleich von $Z(k)$ (Gleichung 5.10) und $G(k)$ (Gleichung 5.4) zeigt, daß die Fouriertransformierte $Z(k)$ der Kreuzkorrelationsfunktion einfach das Produkt aus der Fouriertransformierten der Funktion $h(x)$ und der komplex konjugierten Fouriertransformierten der Funktion $g(x)$ ist:

$$Z(k) = H(k) G^*(k) \quad (5.11)$$

Dieser Zusammenhang kann analog auf zweidimensionale Signale (Bilder) übertragen werden. Die Kreuzkorrelationsfunktion zweier Bilder $g(x, y)$ und $h(x, y)$ ist gegeben durch:

$$z(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) h(x + \alpha, y + \beta) dx dy \quad (5.12)$$

α und β sind Verschiebungen in x- und y-Richtung.
Mittels Fouriertransformation erhält man:

$$z(\alpha, \beta) \Leftrightarrow Z(k_\alpha, k_\beta) = H(\vec{k}) G^*(\vec{k}) \quad (5.13)$$

5.2 Diskrete Bilder

Da in dieser Arbeit mit digitalisierten, also diskreten Bildern gearbeitet wird, werden Integrale gegen Summen ausgetauscht. Für zwei Bilder mit $N \times M$ Elementen lautet die diskrete Korrelationsfunktion

$$z_e(\alpha, \beta) = g_e(x, y) \circ h_e(x, y) \quad (5.14)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} g_e(n, m) h_e(\alpha + n, \beta + m) \quad (5.15)$$

mit $\alpha = 0, 1, 2, \dots, N-1$ und $\beta = 0, 1, 2, \dots, M-1$ ($\Delta\alpha = 1, \Delta\beta = 1$).

Die direkte Summations-Methode wäre bei größeren Bildern sehr rechen- und zeitintensiv. Gleichung 5.15 muß $k = NM$ mal für jeden Bildpunkt des Kreuzkorrelationsbildes durchgeführt werden. Nimmt man ein quadratisches Bild mit N^2 Bildpunkten, benötigt man $n = N^4$ Multiplikationen. Wesentlich effektiver und weniger zeitintensiv ist die schnelle Fouriertransformation FFT. Mit Gleichung 5.13 erhält man dann das Kreuzkorrelationsbild durch insgesamt drei Fouriertransformationen:

$$z_e(x, y) = FFT^{-1}(FFT(g)FFT(h)) \quad (5.16)$$

mit FFT^{-1} : Inverse Fouriertransformation

Man erhält direkt das gesamte Kreuzkorrelationsbild. Benutzt man den 2D-Radix-2-FFT-Algorithmus, werden pro Fouriertransformation $n' = (\frac{3}{4}N^2) \log N$ Multiplikationen benötigt [6]. Zur Berechnung des gesamten Kreuzkorrelationsbildes sind dann $n \approx 2N^2 \log N$ Multiplikationen erforderlich. Im Vergleich zur direkten Summationsmethode ist die Fast-Fourier-Methode um den Faktor $v \approx \frac{N^2}{2 \log N}$ schneller. Bei $N = 256$ Pixeln ist das ein Faktor $v \approx 13600!$

5.3 Bildverschiebung

Die Eigenschaft der Kreuzkorrelationsfunktion von zwei Signalen oder Bildern besteht darin, daß die Position des Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion gerade der Verschiebung \vec{r} entspricht, wenn diese Bilder bis auf eine Verschiebung \vec{r} (nahezu) identisch sind. Die Kreuzkorrelationsfunktion $z(\alpha, \beta)$ ist ein Maß für

die Identität beider Bilder in Abhängigkeit von der Verschiebung (α, β) . Wenn $\vec{r} = (\alpha_0, \beta_0)$ ist, erreicht die Kreuzkorrelationsfunktion ihr Maximum.

Die Autokorrelationsfunktion eines Bildes

$$y(\alpha, \beta) = \int g(x, y)g(x + \alpha, y + \beta)dx dy$$

hat somit ihr Maximum immer bei $\alpha = 0$ und $\beta = 0$.

Diese Eigenschaft der Kreuzkorrelationsfunktion soll anhand einer exponentiellen Schreibweise der Intensitätskreuzkorrelationsfunktion verdeutlicht werden.

Nach [13] kann die Kreuzkorrelationsfunktion der Intensität eines Specklebildes in der Beobachtungsebene B geschrieben werden als:

$$g^{(2)}(\vec{r}, \tau) - 1 = e^{-\frac{r^2}{d_k^2} + \frac{\tau_d^2}{\tau_c^2}} e^{-\frac{1}{\tau_c^2}(\tau - \tau_d)^2} \quad (5.17)$$

Dabei ist \vec{r} der Abstand zweier Punkte P_1 und P_2 in der Beobachtungsebene, τ der zeitliche Abstand bezüglich zweier Punkte P_1 und P_2 , τ_d die Zeit, die eine Speckle für die Wanderung entlang der Strecke \vec{r} benötigt, d_k die Kohärenzbreite des Specklebildes und τ_c die Kohärenzzeit des Specklemusters (siehe Kapitel 2.4).

Trägt man $g^{(2)}$ in Abhängigkeit von τ auf und hält r als Parameter fest (Abbildung 5.1), hat $g^{(2)}$ sein Maximum bei $\tau = \tau_d$. Bei $r = 0$ stellt $g^{(2)}$ die Autokorrelationsfunktion des Specklebildes dar. Ihr Maximum liegt immer bei $\tau = 0$.

Gleichung 5.17 kann man mit $\vec{r}\vec{v}_s = \frac{\tau_d d_k^2}{\tau_c^2}$ umformen zu:

$$g^{(2)}(\vec{r}, \tau) - 1 = e^{-\frac{d_k^2 - \tau_c^2 v_s^2}{\tau_c^2 d_k^2} \tau^2} e^{-\frac{1}{d_k^2}(\vec{r} - \vec{v}_s \tau)^2} \quad (5.18)$$

Trägt man $g^{(2)}$ in Abhängigkeit von r auf und hält $\tau = \tau_d$ als Parameter fest (Abbildung 5.1), hat die Kreuzkorrelationsfunktion ihr Maximum bei $\vec{r} = \vec{v}_s \tau$. Auf die Kreuzkorrelation von zwei im zeitlichen Abstand τ_d aufgenommenen Specklebilder übertragen bedeutet das, daß die Kreuzkorrelationsfunktion ihr Maximum bei der Verschiebung $\vec{r} = (\alpha_0, \beta_0)$ hat.

Eine weitere Eigenschaft der (normierten) Kreuzkorrelationsfunktion ist, daß ihr Maximalwert $g_{max}^{(2)} = 2$, und ihr Minimalwert $g_{min}^{(2)} = 1$ beträgt.

Da Specklebilder aus einer Vielzahl von Leuchtflecken zusammengesetzt sind, deren Intensität räumlich gaußverteilt ist, besteht das Auto- und das Kreuzkorrelationsbild von Specklebildern ebenfalls wieder aus einer (zweidimensionalen) Gaußfunktion (wie auch Gleichung 5.17 und 5.18 zeigen). Neben dem Hauptmaximum gibt es noch eine Vielzahl von (i.a. deutlich niedrigeren) Nebenmaxima, die aus der endlichen Mittelung resultieren. Ein Beispiel eines Kreuzkorrelationsbildes zweier Specklebilder (in x-Richtung um 30 Pixel gegeneinander verschoben) ist in Abbildung 5.2 zu sehen.

5.4 Periodizität

Es wird eine relative Verschiebung zweier Bilder aus $N \times M$ -Elementen mit der Breite $2a$ und der Höhe $2b$ in X- und Y-Richtung betrachtet (Abbildung 5.3).

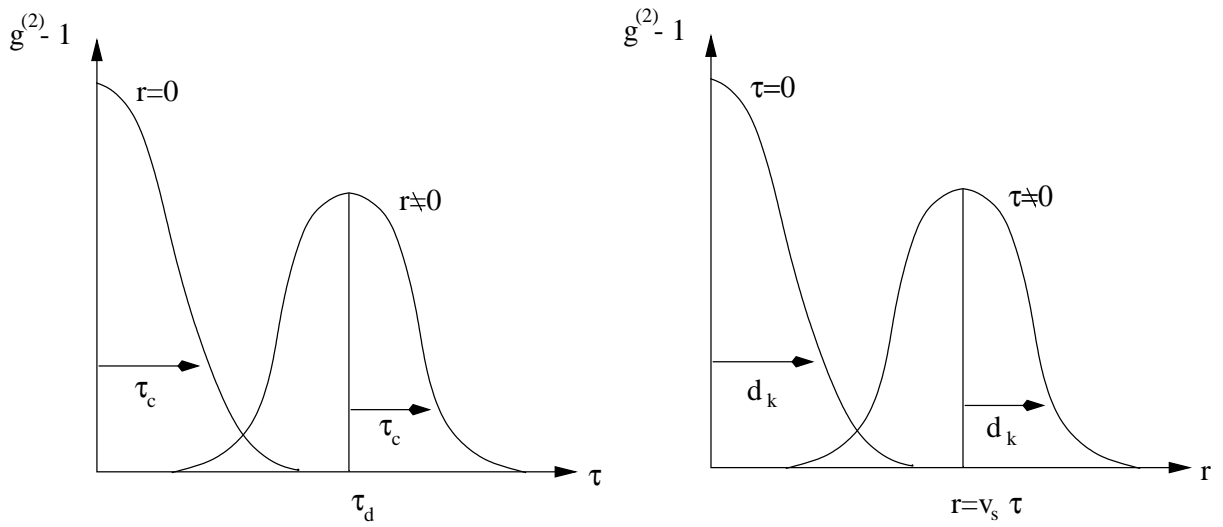


Abbildung 5.1: Zeit-räumliche Intensitätskorrelationsfunktion in Abhängigkeit von τ (\vec{r} als Parameter) und \vec{r} (τ als Parameter).

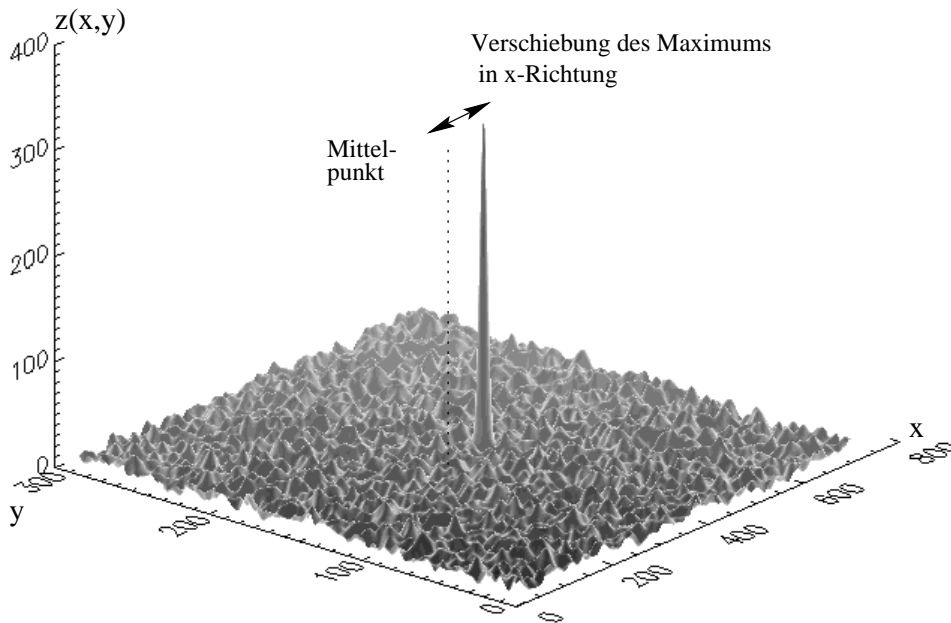


Abbildung 5.2: Beispiel eines Kreuzkorrelationsbildes. Die Verschiebung des Hauptmaximums relativ zum Mittelpunkt des Bildes entspricht der Specklewanderung in der Zeiteinheit τ .

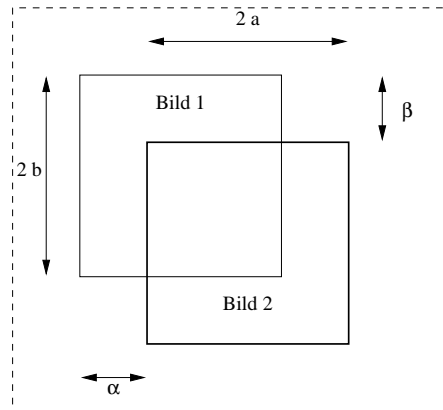


Abbildung 5.3: Verschiebung zweier Specklebilder um α und β relativ zueinander. Die Breite und Höhe der Bilder ist gleich $2a$ und $2b$.

Physikalisch sinnvoll und möglich sind nur Verschiebungen im Bereich

$$\begin{aligned} \alpha &= -2a, \dots, -a, \dots, 0, \dots, +a, \dots, +2a \\ \beta &= -2b, \dots, -b, \dots, 0, \dots, +b, \dots, +2b \end{aligned}$$

(Ansonsten haben beide Bilder keine Identitätsmerkmale mehr \rightarrow keine Korrelation)

Nun zeigt jede Fourier-Transformation, die auf einen endlichen Bereich beschränkt ist (hier $0 \dots N$, $0 \dots M$), eine Periodizität mit

$$e^{-i2\pi \frac{x}{N}} \text{ und } e^{-i2\pi \frac{y}{M}}$$

Bei einer Verschiebung in X-Richtung ist die Periodizität $N = 2a$, bei einer Verschiebung in Y-Richtung liegt sie bei $M = 2b$. Die Kreuzkorrelationsfunktion bekommt dann die gleiche Periodizität, wodurch sich der in Abbildung (5.4) dargestellte Zusammenhang zwischen der tatsächlichen Verschiebung α und der Verschiebung α' , die man aus der Kreuzkorrelation beider Bilder erhält, ergibt. Analog in Y-Richtung mit β und β' . Für eindeutige Auswertungen muß der Bereich der Verschiebung deshalb auf $\pm a$ und $\pm b$ beschränkt werden.

5.5 Endliche Belichtungszeit

Der Einfluß der endlichen Belichtungszeit auf die Kreuzkorrelation soll in diesem Abschnitt diskutiert werden.

Bei einer realen Kamera als Detektor für das Specklewandern wird immer eine endliche Belichtungszeit benötigt, um ein ausreichend belichtetes, also kontrastreiches Bild zu bekommen.

Diese Integration des Lichtes führt jedoch bei bewegten Bildern zu störenden Effekten. Zwei Gesichtspunkte fallen dabei besonders auf:

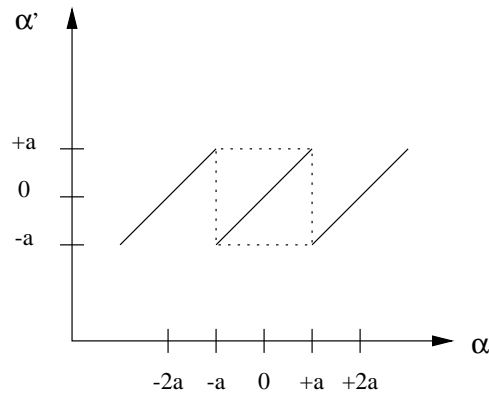


Abbildung 5.4: Periodizität der aus der Kreuzkorrelation ermittelten Verschiebung α' in Abhängigkeit von der tatsächlichen Verschiebung α . Entsprechendes gilt für β' und β .

1. Verbreiterung der Gauß-Funktion der Autokorrelation eines Bildes und der Kreuzkorrelation zweier aufeinanderfolgender Bilder (bei bewegten, gaußförmig verteilten Lichtfeldern)
2. Verschlechterung des Signal-Rausch-Verhältnisses der Kreuzkorrelation

In den folgenden beiden Unterkapiteln werden diese Effekte behandelt.

5.5.1 Verbreiterung der Korrelationsfunktion

Der erste Punkt scheint erst einmal nicht gravierend zu sein, da es in dieser Arbeit darum geht, die Wanderung des Maximums der Gaußfunktion zu bestimmen. In einer Simulation hat sich jedoch gezeigt, daß sich die Maximumsposition bei fortschreitender zeitlicher Integration relativ zum zeitlichen Abstand der Bilder - also der Verschmierung - zu kleineren Werten hin verändert.

Diese Wanderung des Maximums der Kreuzkorrelation wird durch Randeffekte in den an der Kreuzkorrelation beteiligten Bildern hervorgerufen. Dieser Effekt soll hier etwas genauer betrachtet werden. Dazu soll das Specklebild auf ein eindimensionales Bild mit einer einzigen Gaußfunktion reduziert werden. Diese Gaußfunktion hat die $\frac{1}{e}$ -Breite Γ . Dann werden zwei Bilder $A(x)$ und $B(x)$ aus dieser Gaußfunktion erzeugt. Bild B ist um τ Pixel gegenüber Bild A verschoben und jedes Bild wird über den Bereich $\Delta\tau$ integriert - man erhält somit zwei verbreiterte Bilder. Diese werden mit der Kreuzkorrelationsfunktion $z_{AB}(t) = \int A(x)B(x+t)dx$ korreliert und die Maximumsposition $M_{z(A,B)}(x)$ bestimmt (Abbildung 5.5). Es zeigt sich, daß, wenn beide Bilder die (verbreiterte) Gaußfunktion noch vollständig enthalten (wie in Abbildung 5.5), kein Fehler in der Bestimmung der Verschiebung aus der Kreuzkorrelation auftritt.

Wenn jetzt aber durch fortschreitende Integration $\Delta\tau$ (und natürlich größerer Verschiebung τ) ein Teil der Bildinformation (der Gaußfunktion) aus dem Bild herauswandert, und beide Bilder nicht mehr (bis auf eine Verschiebung) identisch sind, so befindet sich das Maximum der Kreuzkorrelation bei $|t| < |\tau|$.

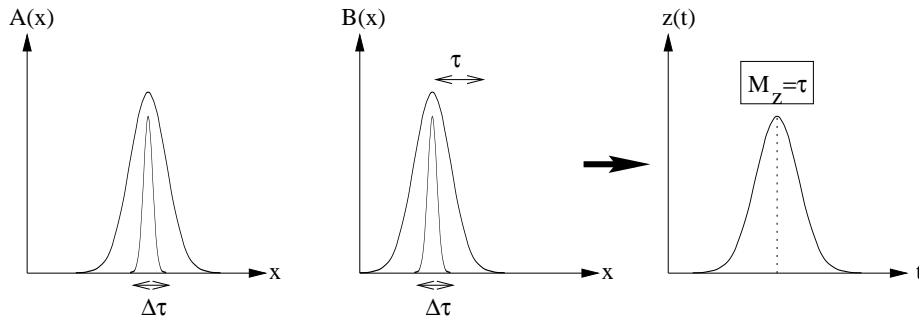


Abbildung 5.5: Zwei um τ zueinander verschobene und über $\Delta\tau$ integrierte Bilder $A(x)$ und $B(x)$. Ausgangspunkt beider Bilder ist eine Gaußfunktion.

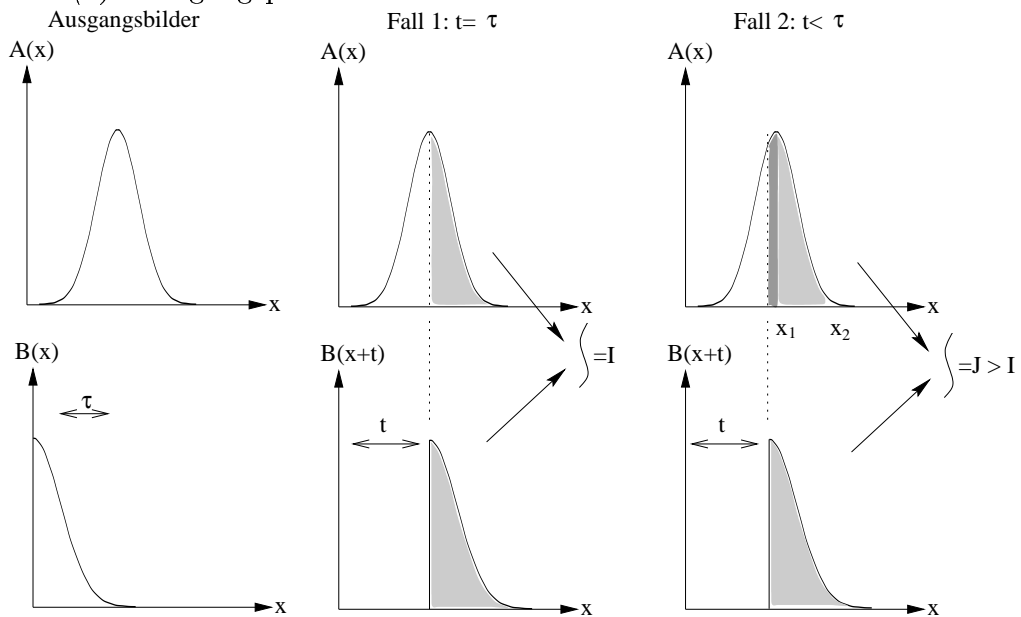


Abbildung 5.6: Die Kreuzkorrelationsfunktion liefert bei $|t| < |\tau|$ einen größeren Wert als bei $t = \tau$. Ursache ist die Unvollständigkeit der Gaußfunktion im Bild $B(x)$.

Dies läßt sich anhand der Funktionsweise des Kreuzkorrelationsintegrals in Abbildung 5.6 verdeutlichen. Nur die schraffierten Flächen der beiden Bilder $A(x)$ und $B(x+t)$ gehen in das Kreuzkorrelationsintegral ein. Im Fall 2, wo $t < \tau$ ist und die Maxima der Gaußfunktionen in Bild $A(x)$ und $B(x+t)$ nicht mehr am gleichen Ort x ($x_B < x_A$) liegen, ist der Flächenzuwachs links vom Maximum der Gaußfunktion (Ort x_1) im Bild $A(x)$ größer als die Fläche, die im Randbereich der Gaußfunktion (Ort x_2) im Bild $A(x)$ verloren geht - das Kreuzkorrelationsintegral hat bei $t < \tau$ einen größeren Wert als bei $t = \tau$ (Fall 1), und das Maximum des Kreuzkorrelationsbildes verschiebt sich zu einem kleineren Wert hin.

Bei einem realen Specklebild (zweidimensional und eine Vielzahl von Leuchtflecken mit gaußförmiger Verteilung) sind obige Überlegungen übertragbar, mit dem Unterschied, daß nur noch die Speckle an den Rändern der Bilder diesen Effekt verursachen - der Effekt bleibt aber gleich.

Der Fehler wird von der raum-zeitlichen Integration und der ursprünglichen Specklegröße (Kohärenzbreite) in Verbindung mit der gesamten Verschiebung beeinflußt (je größer die 3 Parameter sind, desto größer der Fehler).

5.5.2 Verschlechterung des Signal-Rausch-Verhältnisses

Der zweite Punkt hat direkt Einfluß auf die Statistik der Auswertung der Kreuzkorrelation, da der Fehler der Maximumbestimmung - und einer eventuell durchgeführten Gauß-Anpassung oder einer Paraboloidregression (siehe Kapitel 6.4) - mit schlechter werdenden Signal-Rausch-Verhältnis zunimmt.

Eine sinnvolle Definition des Signal-Rausch-Verhältnisses (Spitzenwert) ist [7]:

$$SNR_{pr} = \sqrt{\frac{I_{max}^2}{e_{rms}}} = \frac{I_{max}}{\sqrt{e_{rms}}} \quad (5.19)$$

Dabei ist I_{max} die Höhe der Gaußfunktion im Maximum und e_{rms} die gemittelte Höhe des verbleibenden Untergrundes ohne die Gaußfunktion (=Rauschen):

$$e_{rms} = \sqrt{\bar{e}^2} \quad \text{mit}$$

$$\bar{e}^2 = \frac{1}{NM} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} e^2(x, y)$$

Es gibt noch eine weitere sinnvolle Definition des Signal-Rausch-Verhältnisses, die bei der Auswertung von Kreuzkorrelationsbildern von Bedeutung ist:

$$SNR_{pp} = \frac{I_{Hauptmaximum}}{I_{Nebenmaximum}}$$

Dieses stellt das Verhältnis von der Höhe des Hauptmaximums zur Höhe des größten Nebenmaximums dar. Mit diesem SNR läßt sich mittels einer gewählten Schranke entscheiden, ob überhaupt das ermittelte Hauptmaximum das richtige ist - und nicht ein Nebenmaximum ist. Weiteres dazu wird im Kapitel 6.4 dargelegt.

Der Zusammenhang zwischen der Belichtungszeit des Bildes (der Verschmierung) und der Abnahme des Signal-Rausch-Verhältnisses SNR_{pr} soll in einer Simulation gezeigt werden. Dieser Simulation liegt ein mit einer CCD-Kamera statisch aufgenommenes Speckle-Bild zugrunde. Die $\frac{1}{e^2}$ -Breite der Autokorrelationsfunktion dieses Bildes beträgt 16 Pixel bei einer Gesamtgröße von 744×568 Pixeln.

Aus dem Speckle-Bild werden zwei um den Abstand τ verschobene Bilder ausgeschnitten (Größe 256×256 Pixel). Es wird eine Belichtung beider Bilder entlang der Verschiebung mit $\Delta\tau$ angenommen. In der Simulation wird dies durch eine Mittelung mehrerer Bilder entlang der Verschiebung zu einem resultierenden Bild erreicht (siehe Abbildung 5.7). Aus diesen beiden gemittelten Bilder wird die Kreuzkorrelation und das SNR_{pr} bestimmt. Das Signal-Rausch-Verhältnis

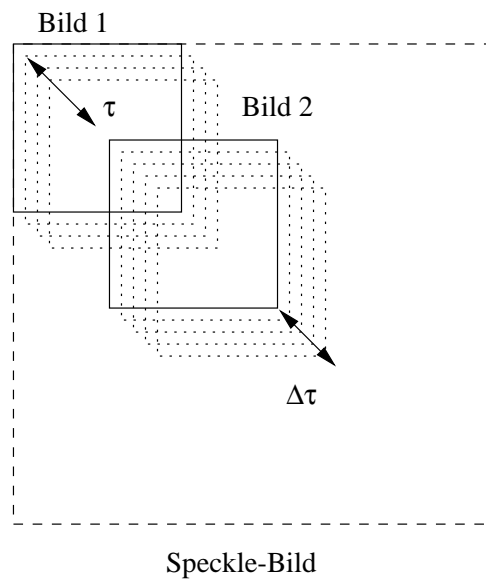


Abbildung 5.7: Simulation der Specklewanderung in zwei um den Abstand τ verschobenen Bildern. Die Belichtung jedes Bildes wird durch Integration (Summation) über einen Bereich $0 \dots \Delta\tau$ (Bild 1) bzw. $\tau \dots \tau + \Delta\tau$ (Bild 2) erreicht.

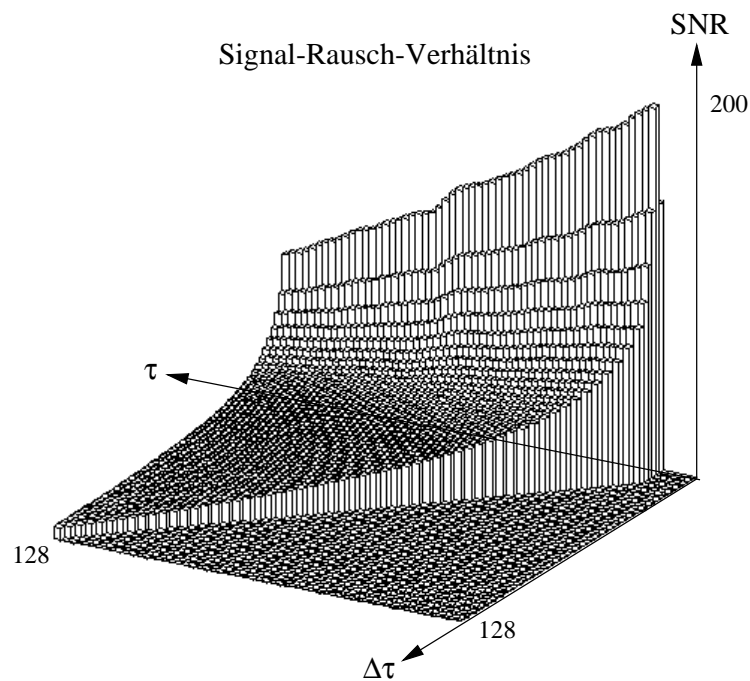


Abbildung 5.8: Das Ergebnis der Simulation. Das Signal-Rausch-Verhältnis SNR_{pr} des Kreuzkorrelationsbildes ist in Abhängigkeit von der Specklewanderung τ und der Belichtung $\Delta\tau$ dargestellt.

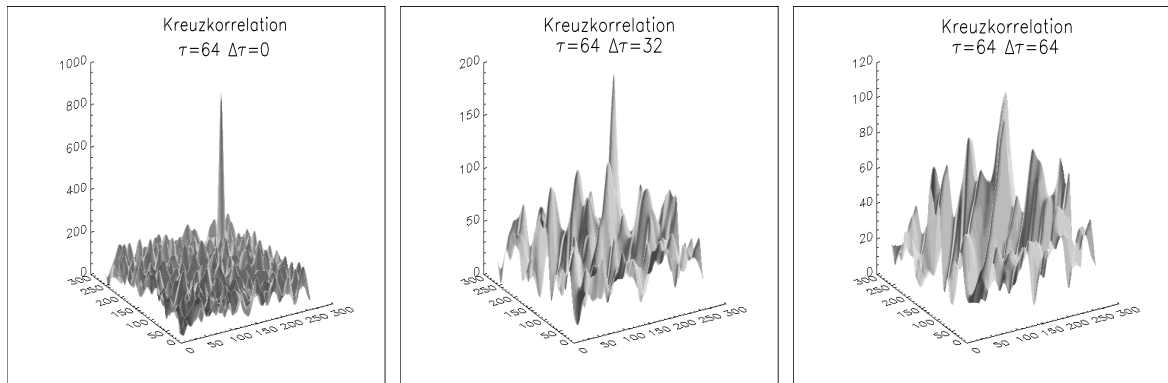


Abbildung 5.9: Beispiel eines Kreuzkorrelationsbildes mit einer Specklewanderung von $\tau = 64$ *Pixel* und einer Belichtung (Integration) über $\Delta\tau = 0, 32, 64$ *Pixel* .

SNR_{pr} in Abhängigkeit von der Verschiebung τ und der Belichtung $\Delta\tau$ ist in Abbildung 5.8 grafisch dargestellt.

Man sieht in Abbildung 5.8 sehr deutlich den Einfluß der Belichtung der Bilder: Je länger die Belichtungszeit, desto stärker sinkt das Signal-Rausch-Verhältnis - insbesondere bei großen Verschiebungen, wo man schnell unakzeptable Verhältnisse erreicht. Durch die raum-zeitliche Integration (= Mittelwertbildung) verringert sich der Informationsgehalt des Speckle-Bildes und die effektive Specklegröße (des gemittelten Bildes) vergrößert sich - Folge ist eine schlechtere Statistik . Weiterhin sinkt das Signal-Rausch-Verhältnis wenn τ größer wird, da dann die beiden Bilder immer weniger Identität besitzen (überlappender Bereich wird kleiner) und die absolute Höhe der Gauß-Funktion sinkt - der Untergrund wird dominanter.

Zur weiteren Veranschaulichung dieses Zusammenhangs wird in Abbildung 5.9 die Kreuzkorrelation zweier Bilder für eine Verschiebung von $\tau = 64$ *Pixeln* und einer Integration über $\Delta\tau = 0, 32, 64$ *Pixeln* gezeigt. Man muß deswegen im Experiment bestrebt sein, eine möglichst kurze Belichtungszeit im Detektor zu erreichen. Als Abschätzung sollte die zeitliche Integration (Belichtung) maximal 10% des Bildabstandes betragen:

$$\Delta\tau < \frac{1}{10}\tau$$

Die Belichtungszeit muß aber mindestens so lang gewählt werden, daß man eine ausreichende Ausnutzung des Dynamik-Bereiches des Detektors erreicht. Bei zu geringer Belichtung fallen sonst elektronisches Rauschen sowie Digitalisierungs- und Diskretisierungsrauschen erheblich ins Gewicht und die Qualität des Kreuzkorrelationsbildes wird wieder verschlechtert.

Bei kleineren Verschiebungen (kleiner als $\frac{1}{4} \dots \frac{1}{8}$ der Bildgröße) können aber auch längere Belichtungszeiten gewählt werden ohne daß eine nennenswerte Verschlechterung der Auswertung eintritt. Weiteres wird dazu im experimentellen Teil dieser Arbeit ausgeführt.

Bisher wurde der Einfluß des Speckle-Kochens (dynamische Änderung des Speckle-Musters) nicht berücksichtigt. Das Speckle-Kochen verleiht obigen Betrachtungen noch mehr Gewicht, da sich die Struktur des Speckle-Musters während der zeitlich-räumlichen Integration ändert und zu einer massiven Verschlechterung der Ergebnisse der Kreuzkorrelation führt (Identität beider an der Kreuzkorrelation beteiligten Bilder verringert sich).

5.6 Integration und Autokorrelation

Bisher wurde die endliche Belichtungszeit (raum-zeitliche Integration) nur als Störfaktor angesehen. Man kann jedoch aus der von ihr verursachten Verbreiterung der Gauß-Funktion der Autokorrelation eines aufgenommenen Speckle-Bildes den Betrag der Specklewanderung (Verschiebung) abschätzen.

Dazu wird von einem statischen Specklebild die $\frac{1}{e}$ -Breite (Γ_s) der Gaußverteilung der Autokorrelationsfunktion bestimmt. Dann nimmt man ein dynamisches Specklebild mit $\Delta\tau = \tau$ auf. Die Gaußverteilung des Autokorrelationsbildes ist dann entlang der Specklewanderung elliptisch verzerrt. Bestimmt man entlang der Ellipsenhauptachse die $\frac{1}{e}$ -Breite (Γ_d), so läßt sich der Betrag der Specklewanderung S abschätzen durch:

$$S = \Gamma_d - \Gamma_s$$

Bei kleineren Verschiebungen (kleiner $\frac{1}{3} \dots \frac{1}{4}$ der Bildgröße) erhält man noch relativ kleine Fehler ($< 10\%$).

Kapitel 6

Experimenteller Teil

6.1 Detektoren

In dieser Arbeit wurden zur Aufnahme der Specklebilder CCD-Kameras benutzt (CCD=Charge Coupled Device). Der allgemeine Aufbau einer CCD-Kamera ist in Abbildung 6.1 gezeigt. Im CCD-Sensor wird das einfallende Licht in elektrische Ladung umgewandelt und abtransportiert. Das Prinzip des Ladungstransportes beruht auf der Ladungsverschiebung, die in Schieberegistern stattfindet.

Die hier verwendeten CCD-Sensoren besitzen eine sogenannte Interline-Struktur. Der Sensor ist in Belichtungs- und Speicherbereiche unterteilt, welche dann streifenförmig angeordnet sind (Abbildung 6.2). Über die lichtempfindliche Sensorfläche (Belichtungsbereich) wird die Information dem eigentlichen CCD-Chip zugeführt. Über eine Verbindung zwischen der Sensorfläche und den vertikalen Schieberegistern wird die entstandene Ladung innerhalb kurzer Zeit ($300ns \dots 2.5\mu s$) in die abgedunkelte Schieberegister (Speicherbereich) parallel übernommen. Die Ladungen der vertikalen Schieberegister werden nun zeilenweise in das horizontale Schieberegister (Ausleseregister) geschoben und von dort seriell ausgelesen (Abbildung 6.2).

Da die lichtempfindliche Sensorfläche nur einen kleinen Teil der gesamten

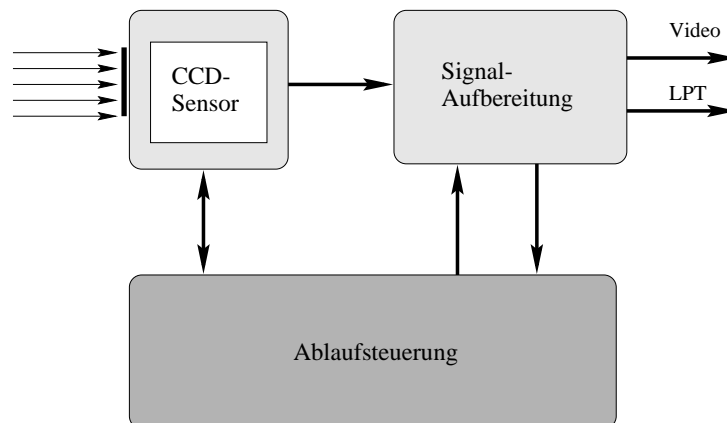


Abbildung 6.1: Allgemeiner Aufbau einer CCD-Kamera

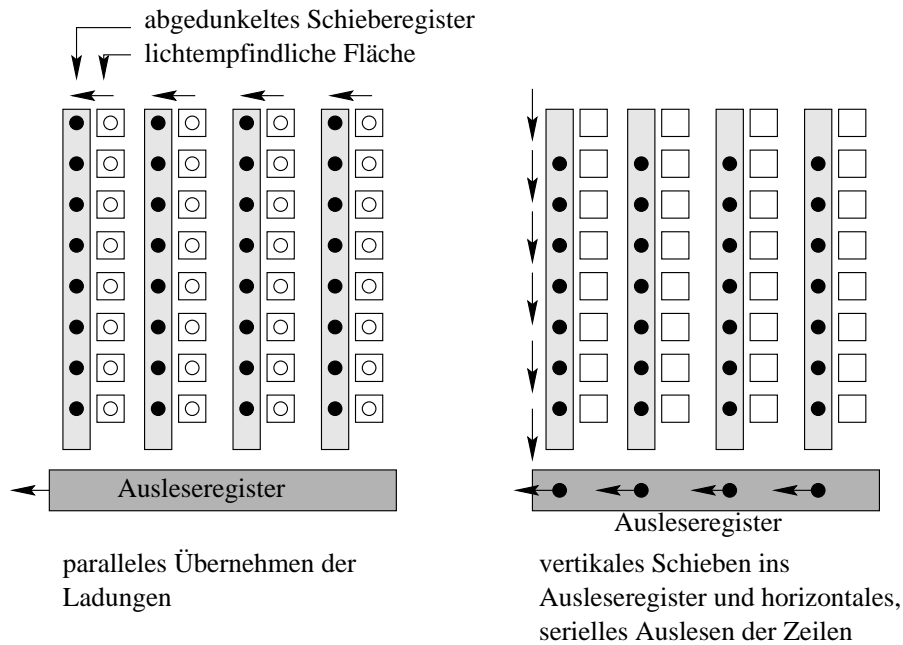


Abbildung 6.2: Ladungstransport im CCD-Chip

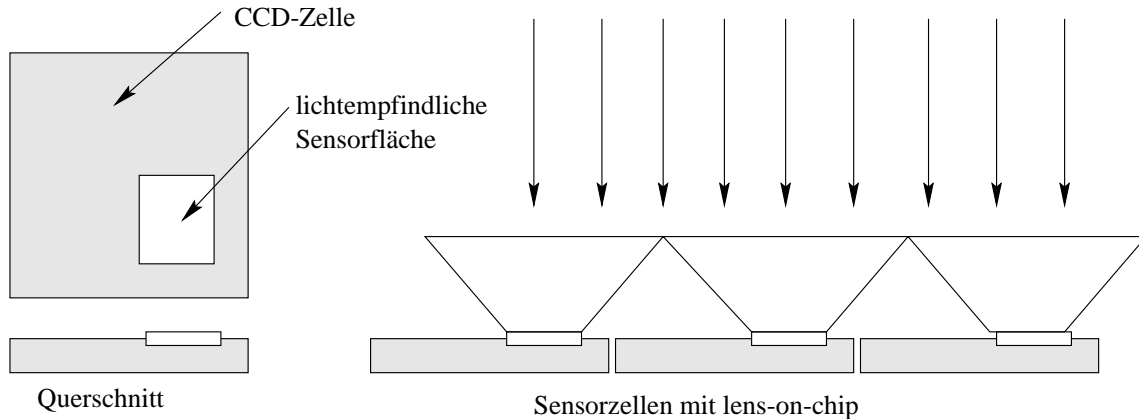


Abbildung 6.3: CCD-Chip mit Mikrolinsen-system

CCD-Zelle ausmacht, können die CCD-Sensoren mit einer Matrix aus Mikrolinsen versehen werden. Diese bündeln das einfallende Licht und man erreicht eine Empfindlichkeitssteigerung um ca. den Faktor zwei (Abbildung 6.3).

Für diese Arbeit wurden zwei verschiedene Kameras verwendet:

1. Eine Standard-CCIR-TV-Kamera mit einem 1/2-Zoll-CCD-Chip und 768 x 484 Pixeln. Die Kamera arbeitet im Interlace-Modus (Halbbildverfahren) und liefert je ein Halbbild im fixen Abstand von 20 ms. Das Video-Signal wird dann mittels einer sog. Frame-Grabber-Karte (Analog-Digital-Wandlung) in einen PC eingelesen.
2. Eine spezielle CCD-Double-Flash-Kamera mit einem 2/3-Zoll CCD-Chip und 756 x 581 Pixeln. Es können zwei Bilder in einem variablen Abstand von 300ns bis ca. 40ms aufgenommen und entweder über ein Video-Signal

mittels Frame-Grabber-Karte oder über eine Druckerschnittstelle quasiparallel in den PC eingelesen werden. Der auf die Lichtempfindlichkeit bezogene Dynamikbereich der Kamera umfaßt linear 8 Bit. Der Aufnahmezeitpunkt beider Bilder wird durch ein externes Triggersignal gegeben. Auf dem CCD-Chip befinden sich die oben angesprochenen Mikrolinsen.

Bei beiden Kameras wird das erste Halbbild durch alle geraden Zeilen im CCD-Chip gebildet, das zweite durch alle ungeraden.

6.2 Belichtungssteuerung

In Kapitel 5.5 wurde bereits die Notwendigkeit einer kurzen Belichtungszeit für eine genaue Bestimmung der Specklewanderung angesprochen. Um die Belichtungszeit eines Bildes steuern zu können, muß der Laserstrahl für die Belichtungsdauer $\Delta\tau$ geschaltet werden. Dies kann entweder mit einem gepulsten Laser mit variabler Pulsdauer, oder wie in dieser Arbeit mit einem CW-Laser und einer nachgeschalteten **Pockelszelle** geschehen. Im folgenden soll kurz die Funktionsweise einer solchen Pockelszelle erläutert werden.

Grundlage für den Pockelseffekt ist das nichtlineare Verhalten eines Mediums (hier eines optisch anisotropen Kristalls) bei Durchquerung einer elektromagnetischen Welle (Licht) [5].

In der skalaren Näherung besteht zwischen der Polarisation P und dem polarisierenden elektrischen Feld E der Zusammenhang:

$$P = \epsilon_0 \chi E \quad (6.1)$$

Nichtlinearitäten in diesem Medium entstehen durch eine feldstärkeabhängige Suszeptibilität:

$$\chi(E) = \chi_1 + \chi_2 E + \chi_3 E^2 + \dots \quad (6.2)$$

Setzt man 6.2 in 6.1 ein, besteht die Polarisation ebenfalls aus einem linearen Term und nicht linearen Termen. Dies bedeutet, daß die atomaren elektrischen Dipole nicht mehr linear auf hohe elektrischen Wechselfelder der Lichtwelle antworten können:

$$P = \epsilon_0 (\chi_1 E + \chi_2 E^2 + \dots) \quad (6.3)$$

Durch den quadratischen Term in 6.3 wird der Brechungsindex des Mediums abhängig von E und es tritt Doppelbrechung auf:

$$\frac{1}{n(E)^2} = \frac{1}{n_0^2} + rE + RE^2 \quad (6.4)$$

$$\text{und } \Delta n \approx \frac{n_0^3}{2} (rE + RE^2) \quad (6.5)$$

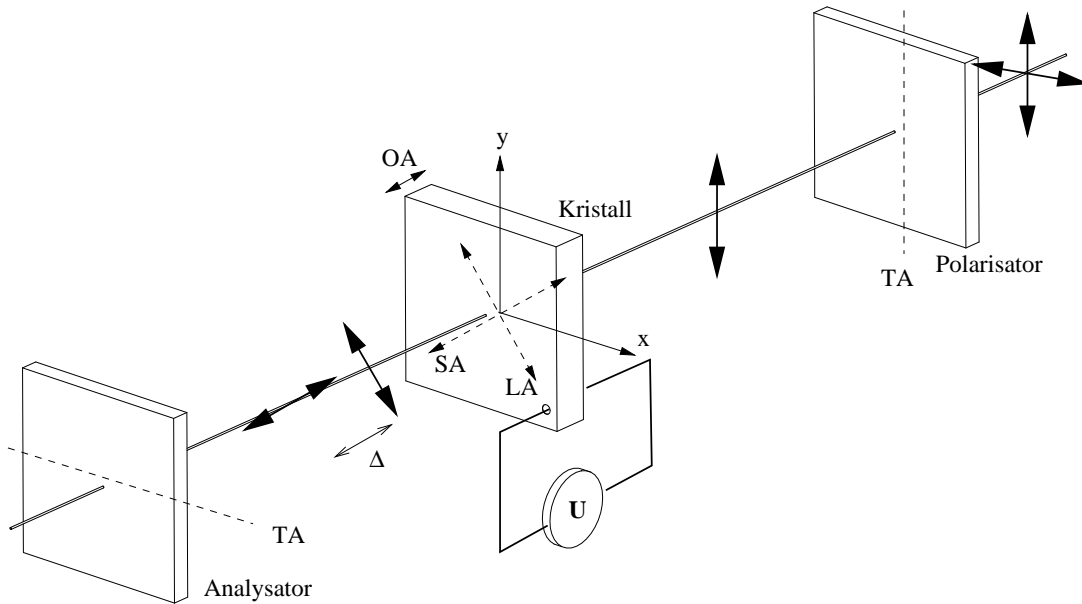


Abbildung 6.4: Pockelszelle zwischen zwei gekreuzten Polarisatoren.

r und R sind elektrooptische Konstanten. Der Pockels-Effekt resultiert aus dem rE -Term in Gleichung 6.5, der hier durch ein starkes elektrisches **Gleichfeld** E_0 realisiert wird. In einem bereits doppelbrechenden Kristall entstehen dann neue optische Achsen.

Auf den Kristall (z.B. KD_2PO_4) soll nun eine linear polarisierte Lichtwelle fallen. Wird die natürliche optische Achse (OA) des Kristalls parallel zur Ausbreitungsrichtung der Welle gelegt, entstehen in der zur Ausbreitungsrichtung senkrechten Ebene schnelle und langsame Achsen (SA, LA) mit erhöhter bzw. erniedrigter Phasengeschwindigkeit. Ist die Polarisationsrichtung der einfallenden Lichtwelle um 45 Grad zu diesen Achsen gedreht, so wird die Welle in zwei zueinander senkrecht polarisierte Teilwellen gleicher Amplitude aufgespalten (siehe Abbildung 6.4). Es tritt eine Phasenverschiebung zwischen beiden Teilwellen auf, da für diese Teilwellen unterschiedliche Brechzahlen (durch die Anisotropie des Kristalls) und Geschwindigkeiten gelten:

$$\delta = 2\pi r n_0^3 \frac{U}{\lambda_0} \quad (6.6)$$

Die Polarisations Ebene der transmittierten Strahlung ist dann um den Winkel $\theta \sim |E|$ gegenüber der ursprünglichen gedreht [3].

Die Spannung U_{HW} , bei der der Gangunterschied gerade $\lambda/2$ beträgt, ist:

$$U_{HW} = \frac{\lambda_0}{2r n_0^3} \quad (6.7)$$

Die dann entstandene Halbwellenplatte dreht die Polarisations Ebene um 90 Grad.

Bringt man den Kristall zwischen zwei gekreuzte Polarisatoren, so ist die Transmission dieser Anordnung bei $U = 0$ minimal (Null im Idealfall) und er-

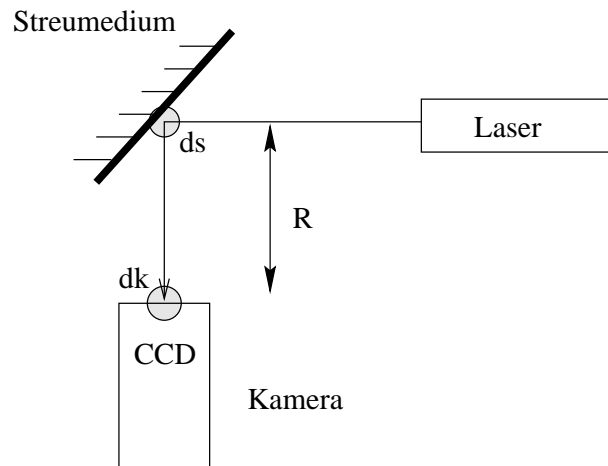


Abbildung 6.5: Aufnahme eines Specklebildes im Nahfeld

reicht ihr Maximum bei $U = U_{HW}$. Anstelle des zweiten Polarisators kann man auch einen polarisierenden Strahlteiler benutzen, wo je nach Polarisationsrichtung der Strahl den Strahlteiler passiert oder um 90 Grad abgelenkt wird (Glan-Laserprisma).

6.3 Vorversuche

6.3.1 Bestimmung des Beleuchtungsdurchmessers

Durch Messung des Specklebildes im Nahfeld soll aus der Kohärenzbreite des Specklebildes (= mittlere Größe eines Speckles) der Durchmesser der Beleuchtungsfläche bestimmt werden. Die entsprechende Versuchsanordnung ist Abbildung 6.5 zu entnehmen.

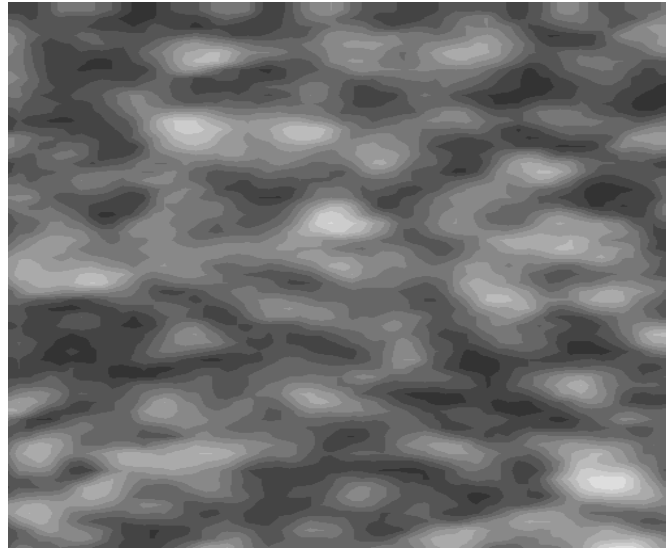
Die Kohärenzbreite d_k ist gerade der Durchmesser der Autokorrelationsfunktion des Specklebildes, bei der die Autokorrelation auf $\frac{1}{e^2}$ abgefallen ist (Abbildung 6.6).

Der Beleuchtungsdurchmesser d_s ist dann gerade umgekehrt proportional zur Kohärenzbreite [2]:

$$d_s = \frac{4\lambda R}{\pi d_k} \quad (6.8)$$

R ist der Abstand zwischen der Streufläche und der Beobachtungsebene und λ die Wellenlänge des Lichtes.

Bei verschiedenen Abständen R werden mit der CCD-Kamera Specklebilder aufgenommen und daraus d_k und somit d_s bestimmt. Es wird jeweils die $\frac{1}{e^2}$ -Breite der Autokorrelation des Specklebildes bestimmt (Da das Ergebnis in Pixeln erscheint, muß noch mit der Pixelbreite des CCD-Arrays multipliziert werden - hier $11\mu m$ als horizontale Pixelbreite).



Autokorrelationsfunktion

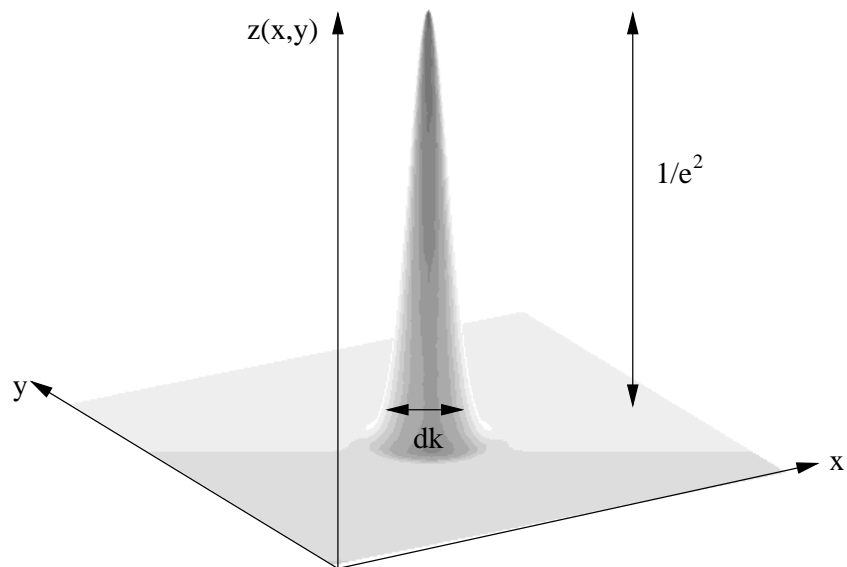


Abbildung 6.6: Ein Specklebild und die Bestimmung von dk in dem dazugehörigen Autokorrelationsbild (Nebenmaxima sind nicht abgebildet) .

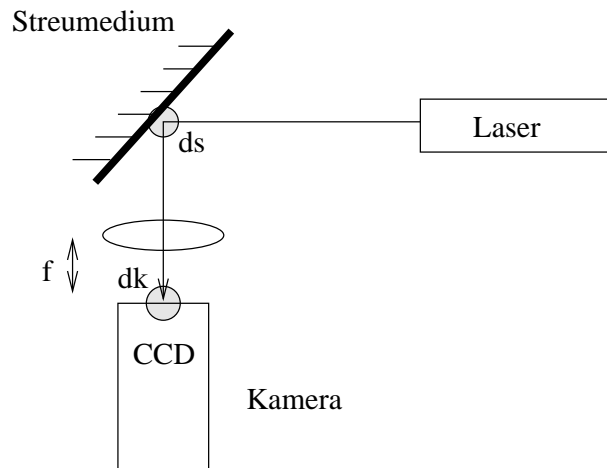


Abbildung 6.7: Messung eines Specklebildes im Fernfeld

R	50mm	100mm	200mm	300mm
d_k	$63\mu\text{m}$	$127\mu\text{m}$	$241\mu\text{m}$	$372\mu\text{m}$
d_s	0.64mm	0.63mm	0.67mm	0.65mm

Mittelwert des Beleuchtungsdurchmessers: $\overline{d_s} = 0.65\text{mm}$

6.3.2 Messung im Fernfeld

Fügt man zwischen Kamera und Streufläche eine Linse mit der Brennweite f ein, und ist der Abstand der Linse zur Kamera gerade gleich der Brennweite, werden Specklebilder im Fernfeld (Fraunhofer-Region) aufgenommen (Abbildung 6.7). Die Kohärenzbreite der Autokorrelationsfunktion des Specklebildes ist dann:

$$d_k = \frac{4\lambda f}{\pi d_s} \quad (6.9)$$

Um in späteren Versuchen aus der Kreuzkorrelation zweier Specklebilder die Specklewanderung bestimmen zu können, sollte für ein gutes Kreuz- bzw. Autokorrelationsbild mit einem hohen Hauptmaximum und niedrigen Nebenmaxima die Breite bzw. die Höhe des Detektors $\sim 30 \dots 50d_k$ betragen. Die Kohärenzbreite d_k sollte aber mindestens 6 Pixel betragen (siehe auch Kapitel 6.4).

Mit Gleichung 6.9 und einer Breite bzw. Höhe des Detektors $L \approx 50d_k$ erhält man eine geeignete Brennweite durch die Gleichung:

$$f \approx \frac{\pi d_s L}{200\lambda} \quad (6.10)$$

Es muß daher eine geeignete Brennweite für alle weiteren Versuche gefunden werden. Dazu sollen die Kohärenzbreiten d_k für verschiedene Brennweiten gemessen werden:

f	40mm	60mm	80mm	120mm	200mm	300mm
d_k (berechnet)	4.5	6.7	9.0	13.5	22.5	33.8
d_k (gemessen)	4	7	9	14	23	36

Alle d_k -Werte sind in Pixeln angegeben und auf die horizontale Achse des CCD-Arrays bezogen.

Da das CCD-Array in der Horizontalen aus 756 Pixeln besteht, eignen sich die Brennweiten $f = 80mm$ und $f = 120mm$.

6.3.3 Intensitätsverteilung

In Kapitel 2.3 wurde gezeigt, daß die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Intensität eines Specklebildes durch eine negative Exponentialverteilung gegeben ist:

$$p(I) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{I}{2\sigma^2}}$$

mit $2\sigma_I^2 = \langle I \rangle$

Die Wahrscheinlichkeit, einen Intensitätswert oberhalb einer Schranke I anzutreffen, ist dann:

$$P(I) = \int_I^{\infty} \frac{1}{\langle I \rangle} e^{-\frac{\zeta}{\langle I \rangle}} d\zeta \quad (6.11)$$

$$= e^{-\frac{I}{\langle I \rangle}} \quad (6.12)$$

Die Wahrscheinlichkeit, einen Intensitätswert im Intervall $I \dots I + \Delta I$ zu finden, ist somit entsprechend:

$$P(I) = \int_I^{I+\Delta I} \frac{1}{\langle I \rangle} e^{-\frac{\zeta}{\langle I \rangle}} d\zeta \quad (6.13)$$

$$= (1 - e^{-\frac{\Delta I}{\langle I \rangle}}) e^{-\frac{I}{\langle I \rangle}} \quad (6.14)$$

$$= k e^{-\frac{I}{\langle I \rangle}} \quad (6.15)$$

Also der gleiche Verlauf wie in Gleichung 6.11.

In Abbildung 6.8 ist ein Vergleich der berechneten Funktion aus Gleichung 6.13 und einem Histogramm eines real aufgenommenen Specklebildes dargestellt. Abgesehen von einer Untergrundkorrektur - Streulicht und inkohärentes Licht anderer Lichtquellen wie PC-Monitor etc., das bei der Aufnahme des Specklebildes zu einer Verschiebung der Histogrammverteilung zu höheren Intensitätswerten führt (Maximum liegt nicht bei Null) - erhält man eine gute Übereinstimmung des Histogramms mit der negativen Exponentialverteilung.

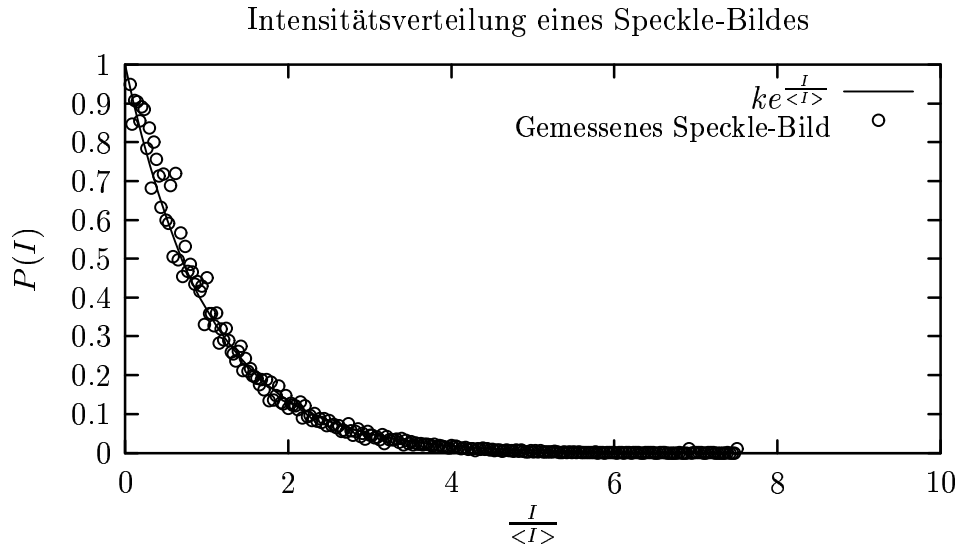


Abbildung 6.8: Verteilung der Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(I)$ eines Specklebildes, einen Intensitätswert I im Intervall $[I \dots I + \Delta I]$ vorzufinden, im Vergleich mit dem Histogramm eines experimentell aufgenommenen Specklebildes.

6.4 Auswertelgorithmen

Um die Specklewanderung in einem bestimmten Zeitintervall τ bestimmen zu können, werden mit der CCD-Kamera zwei Bilder $g(x,y)$ und $h(x,y)$ im zeitlichen Abstand τ aufgenommen. Man bildet dann das Kreuzkorrelationsbild der beiden Bilder mittels der Fouriertransformation:

$$z_e(x, y) = FFT^{-1}(FFT(g(x, y)) * FFT(h(x, y))) \quad (6.16)$$

Da die beiden Bilder diskret sind, ist auch das Kreuzkorrelationsbild diskret und hat die gleiche Größe wie das ursprüngliche Bild.

Da die räumliche Verteilung der Intensität eines (einzelnen) Speckles einer Gaußverteilung folgt, ist auch das Hauptmaximum des Kreuzkorrelationsbildes eine zweidimensionale Gaußfunktion. Im Kreuzkorrelationsbild zeigen sich noch weitere Nebenmaxima, die aber i.a. deutlich niedriger als das Hauptmaximum sind. Sind beide Bilder identisch (Verschiebung $\vec{r} = 0$), ist das Maximum der Gaußfunktion genau im Mittelpunkt des Kreuzkorrelationsbildes. Eine Verschiebung beider Bilder um den Vektor \vec{r} bewirkt dann eine Verschiebung des Hauptmaximums des Kreuzkorrelationsbildes um ebenfalls den Vektor \vec{r} .

Aus dem Verschiebungsvektor \vec{r} des Maximums läßt sich dann direkt die Specklewanderungsgeschwindigkeit \vec{v}_s in der Detektorebene berechnen:

$$\vec{v}_s = \begin{pmatrix} \frac{(r_x - x_0)}{(Bl_B)\tau} \\ \frac{(r_y - y_0)}{(Hl_H)\tau} \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

mit

- r_x : x-Position vom Hauptmaximum des Kreuzkorrelationsbildes (Pixel)
- r_y : y-Position vom Hauptmaximum (Pixel)
- x_0 : x-Koordinate vom Mittelpunkt des Bildes = $\frac{B}{2}$ (Pixel)
- y_0 : y-Koordinate = $\frac{H}{2}$ (Pixel)
- B : Breite des Kreuzkorrel.bildes in Pixeln
- H : Höhe des Kreuzkorrel.bildes in Pixeln
- l_B : Breite eines Pixels des CCD-Detektors
- l_H : Höhe eines Pixels des CCD-Detektors
- τ : zeitlicher Abstand der beiden aufgenommenen Bilder

Bisher war die Genauigkeit der Bestimmung des Maximums des Kreuzkorrelationsbildes auf ± 1 Pixel beschränkt. Um die Position im Subpixelbereich bestimmen zu können, muß man entweder eine zweidimensionalen Gaußanpassung des gesamten Kreuzkorrelationsbildes oder eine Paraboloidregression in der Region des Maximums durchführen (eine Gaußfunktion hat im Maximumsbereich einen annähernd parabelförmigen Verlauf). Der zu Verfügung stehende Gaußanpassungsalgorithmus zeigte sich nur als bedingt brauchbar, da man maximal eine Genauigkeit von ± 0.5 Pixeln erreichen konnte, und die Anpassung bei hohen Nebenmaximaanteil im Bild nicht konvergierte (von der hohen Rechenzeit einmal abgesehen).

Die **Paraboloidregression** des oberen Teils des gaußförmigen Hauptmaximums erwies sich als wesentlich brauchbarer und genauer.

Ausgangspunkt für die Regression ist eine allgemeine Kurve zweiter Ordnung, aus der sich ein beliebiges Paraboloid erzeugen läßt:

$$F(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2$$

Eine Regression dieser Funktion an gemessene Daten A (Bestimmung der unbekannt Parameter a_i) bedeutet eine Minimierung der quadratischen Abweichung zwischen Funktion und Meßdaten:

$$\Delta = \sum_x \sum_y (F(x, y, \{a_i\}) - A(x, y))^2 \tag{6.18}$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_i} = 0 \tag{6.19}$$

für alle i .

Man erhält dann ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösung die gesuchten Parameter a_i sind:

$$\sum_x \sum_y \begin{pmatrix} 2 & 2x & 2y & 2xy & 2x^2 & 2y^2 \\ 2x & 2x^2 & 2xy & 2x^2y & 2x^3 & 2xy^2 \\ 2y & 2xy & 2y^2 & 2xy^2 & 2x^2y & 2y^3 \\ 2xy & 2x^2y & 2xy^2 & 2x^3y & 2xy^3 & 2xy \\ 2x^2 & 2x^3 & 2x^2y & 2x^3y & 2x^4 & 2x^2y^2 \\ 2y^2 & 2xy^2 & 2y^3 & 2xy^3 & 2x^2y^2 & 2y^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} = \sum_x \sum_y \begin{pmatrix} 2A \\ 2xA \\ 2yA \\ 2xyA \\ 2x^2A \\ 2y^2A \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem wurde mit einem PC mittels Cramer-Algorithmus gelöst. Aus den Parametern a_i kann dann die Position des Maximums des Paraboloids bestimmt werden. Bedingung für das Maximum ist

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} = 0 \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} = 0 \quad (6.20)$$

so daß man für die Maximumsposition erhält:

$$x_0 = \left(-a_2 + \frac{a_3 a_4}{2a_6}\right) \left(\frac{-a_4^2}{2a_6} + 2a_5\right)^{-1} \quad (6.21)$$

$$y_0 = \frac{-a_3 - a_4 x_0}{2a_6} \quad (6.22)$$

Mit dieser Regression kommt man auf eine Genauigkeit von 0.1...0.5 Pixeln. Sinnvoll für eine gute Regression ist aber, daß der Wendepunkt der Gaußfunktion außerhalb der Regressionsmatrix liegt. Wenn d_k die $\frac{1}{e^2}$ -Breite der Gaußfunktion ist, liegt der Wendepunkt bei $\sigma = \frac{d_k}{2}$. Für eine 3x3-Matrix muß dann $d_k > 6$ Pixel sein.

Für eine genaue Bestimmung der Specklewanderung ist natürlich noch eine gutes Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) - siehe Kapitel 5.5 - des Kreuzkorrelationsbildes erforderlich; das Verhältnis von Hauptmaximum zu den Nebenmaxima sollte groß sein.

Um entscheiden zu können, ob überhaupt die Position des Hauptmaximums, und nicht die eines Nebenmaximums gefunden wurde, wird das Signal-Rausch-Verhältnis $SNR_{pp} = \frac{I_{Hauptpeak}}{I_{Nebenpeak}}$ als Verhältnis der Höhe des potentiellen Hauptmaximums zur Höhe des nächsten Nebenmaximums (siehe auch Kapitel 5.5) des Kreuzkorrelationsbildes gebildet. Es werden nur Kreuzkorrelationsbilder ausgewertet, bei denen

$$SNR_{pp} > 1.5$$

ist. Wird diese Schranke unterschritten, wird die Messung verworfen (trat bei den Experimenten nur äußerst selten auf).

Mögliche Ursachen für ein zu geringes Signal-Rausch-Verhältnis des Kreuzkorrelationsbildes:

1. **Musterkochen**, verursacht durch Mehrfach- und Tiefenstreuung des Streumediums. Folge ist verringerte Identität zwischen den beiden an der Kreuzkorrelation beteiligten Specklebildern → Hauptmaximum sinkt, Nebenmaxima treten deutlicher hervor.
2. **Periodische Störungen** in den Specklebildern (Streifen, verursacht z.B. durch 50Hz Brummspannung oder elektronische Interferenzerscheinungen - Moirè-Störung). Im Kreuzkorrelationsbild zeigt sich eine stark ausgeprägte Kante entlang der Streifenorientierung. Es besteht aber die Möglichkeit der Filterung im Fourierraum (Hochpaßfilter).

6.5 Messung von Gradientenkomponenten

In Kapitel 4 wurde bereits gezeigt, daß die Specklewanderung direkt mit den zu messenden Geschwindigkeitsgradientenkomponenten zusammenhängt. Mit einer bestimmten geometrischen Anordnung kann man dann einzelne Komponenten aus der Specklewanderungsgeschwindigkeit \vec{v}_s berechnen. In dieser Arbeit wurden (einzelne) Komponenten des Geschwindigkeitsgradiententensors der Rotation, der Dehnung und der Biegung gemessen.

6.5.1 Rotation

Zur Messung der Geschwindigkeitsgradientenkomponente $\frac{\partial v_y}{\partial x}$ der Rotation (siehe Kapitel 3.1, Gleichung 3.3) wird eine Rotationsscheibe benutzt, deren Rotationsachse in der x-z-Ebene liegt (siehe auch Kapitel 4.1, Abbildung 4.1). Diese Rotationsscheibe wird mittels eines Gummi-Riemens über einen Motor angetrieben. Die Geschwindigkeit des Motors wird über eine einstellbare Spannungsquelle bestimmt. Es ließen sich Winkelgeschwindigkeiten im Bereich $\omega \sim \frac{2\pi}{5} \frac{1}{s} \dots 2\pi \frac{1}{s}$ einstellen. Die Messung der tatsächlichen Winkelgeschwindigkeit bzw. der Periodendauer einer Rotation geschieht mit einer Infrarot-Lichtschranke und einer elektronischen Intervall-Uhr.

Zur Vereinfachung wird ein geometrischer Aufbau gewählt, bei dem der Ausfallswinkel $\beta = 90 - \alpha$ ist; α ist der Einfallswinkel. Die Rotationsscheibe ist dabei auf einem Winkelgeber montiert, mit dem der Ausfalls- bzw. Einfallswinkel im Bereich $0^\circ \dots 90^\circ$ eingestellt werden kann.

Als kohärente Lichtquelle kommt ein He-Ne-Laser mit ca. 5mW optischer Leistung zum Einsatz. Eine nachgeschaltete Pockelszelle sorgt für die nötige Belichtungssteuerung (siehe Kapitel 6.2).

Da die Aufnahme des Specklebildes im Fernfeld erfolgen muß, befindet sich zwischen dem Streumedium und dem Detektor eine Linse, deren Abstand zum Detektor gerade deren Brennweite f ist. Nach Kapitel 6.3.2 wird mit Brennweiten von $f = 80mm$ und $f = 120mm$ gearbeitet.

Als Detektor dient eine Standard-CCIR-TV-Kamera und eine spezielle Double-Flash-Kamera, welche bereits in Kapitel 6.1 beschrieben wurden. Der gesamte Aufbau ist in Abbildung 6.9 und Abbildung 6.10 zu sehen.

Die DBF-Kamera kann in 2 Betriebsarten betrieben werden. Zum einen im kontinuierlichen Modus, wo im festen Abstand von 20ms Halbbilder aufgenommen wurden. Dieser Modus wurde nur für Test- und Justagezwecke benutzt. Mit einem an der Kamera angeschlossenen Video-Monitor ist dann eine kontinuierliche Beobachtung des Specklebildes möglich.

In der zweiten Betriebsart können zwei Doppelbilder im variablen zeitlichen Abstand $\tau = 300ns \dots 40ms$ aufgenommen werden und über die parallel Schnittstelle (LPT) in einen PC eingelesen werden. Das erste Bild befindet sich in allen geraden, das zweite Bild in allen ungeraden Zeilen der CCD-Matrix. Über einen Triggereingang ist die Steuerung der Aufnahme des 1. und 2. Halbbildes möglich. Die Kamera kann dabei über eine serielle PC-Schnittstelle programmiert

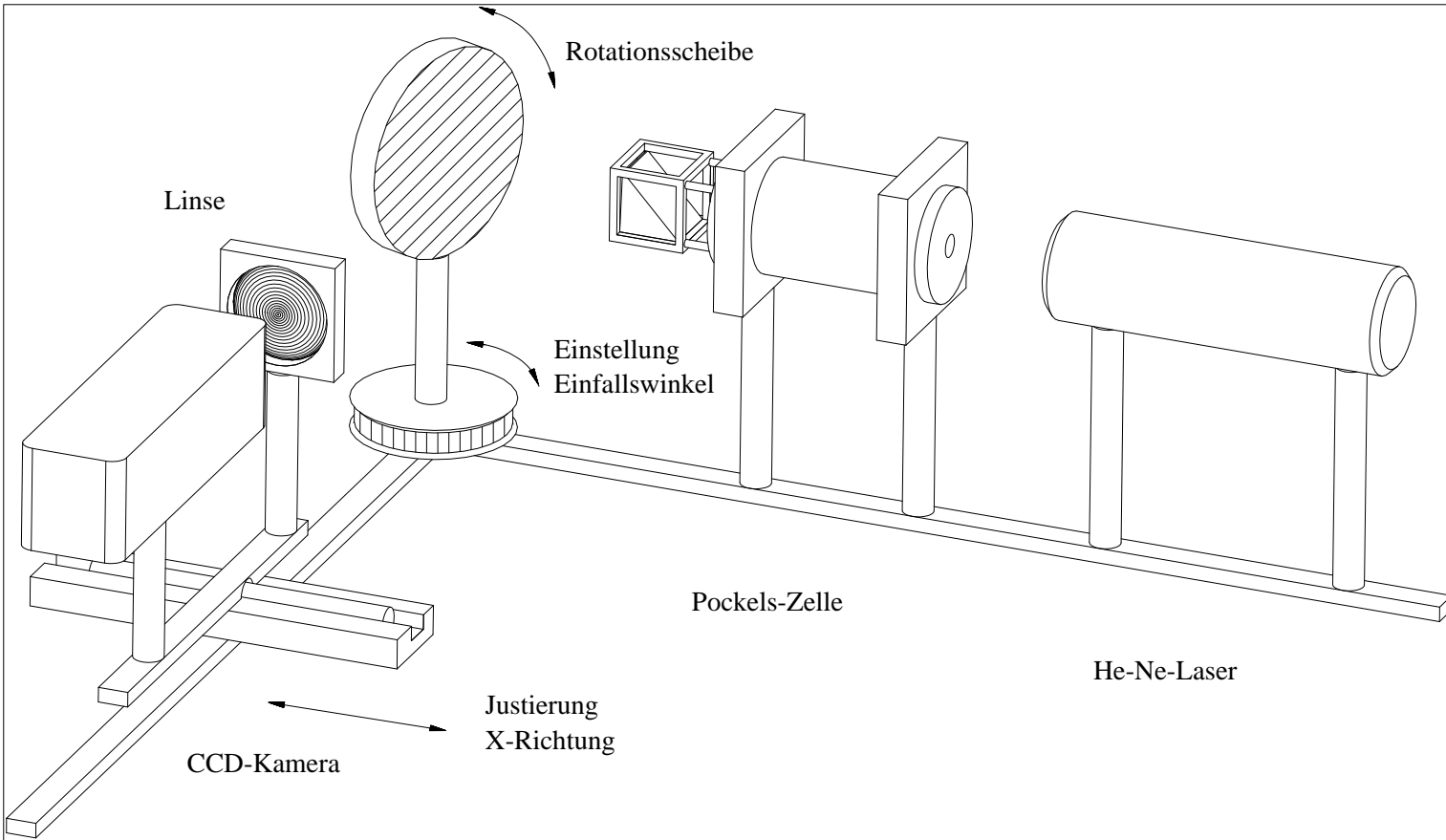


Abbildung 6.9: Versuchsaufbau der Rotationsmessung

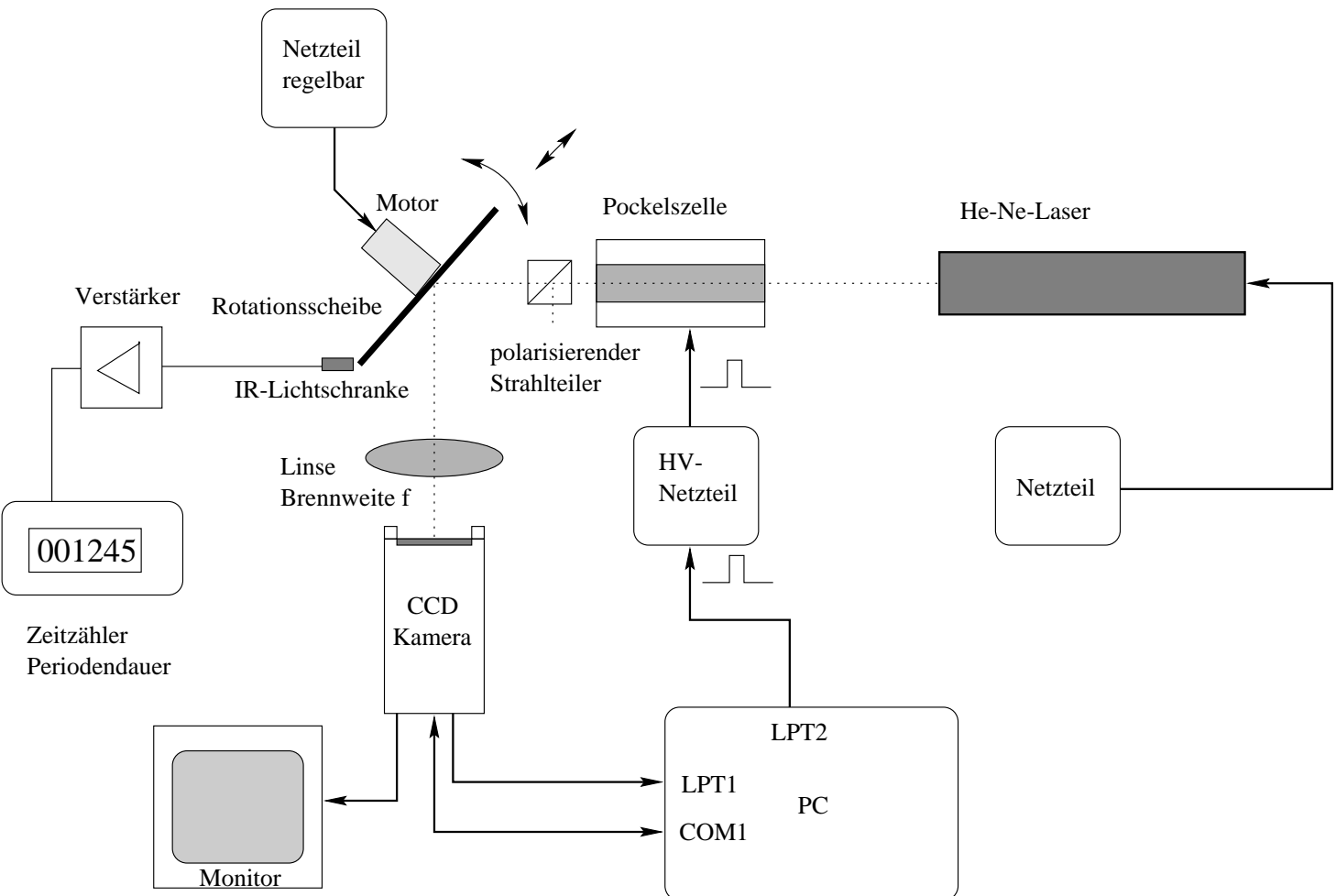


Abbildung 6.10: Meßanordnung für die Rotationsmessung mit der Double-Flash-Kamera (DBF)

werden (Betriebsart, Parameter etc.).

Sowohl die Kamera- als auch die Belichtungssteuerung der Pockelszelle sowie der Bildtransfer von der Kamera in den PC geschah mit selbstgeschriebenen Programmen in einer Multi-Tasking-Betriebssystemumgebung (UNIX). Zeitkritische Routinen wurden direkt in den Betriebssystemkern (den Kernel) integriert. Es konnten unabhängig die Belichtungsdauer $\Delta\tau$ eines Bildes und der zeitliche Abstand beider Bilder τ eingestellt werden:

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= 1\mu s \dots 40ms \\ \tau &= 1\mu s \dots 40ms\end{aligned}$$

(Die obere Grenze ist durch die Kamera gegeben)

Auch sämtliche Auswerteroutinen wurden mit eigenen Programmen durchgeführt.

Bei der TV-CCIR-Kamera ist der zeitliche Abstand $\tau = 20ms$ fest vorgegeben. Auch die Aufnahmesteuerung erfolgt intern. Die Bilder werden über das Video-Signal mittels einer Analog-Digital-Wandlerkarte (Frame-Grabber-Karte) in den PC eingelesen.

Die externe Belichtungssteuerung der Pockelszelle wird durch eine selbstgebaute Triggerelektronik aus dem Video-Signal abgeleitet (siehe Abbildung 6.11). Ein Tiefpaßfilter und ein Komparator liefern aus dem Video-Signal die vertikalen Synchronimpulse und führen sie einem ersten Monoflop zu. Mit diesem kann der Zeitpunkt der Belichtung bezüglich des vertikalen Synchronisierungsimpulses V_{sync} eingestellt werden. Eine zweites, nachgeschaltetes, Monoflop erzeugt den eigentlichen Belichtungsimpuls mit der Dauer $\Delta\tau$ (einstellbar). Diese Kamera wurde in den Experimenten nur verwendet, um zu zeigen, daß die Gradientenmessungen auch mit einer sehr preisgünstigen CCD-Kamera (ca. 500 DM) durchgeführt werden können.

Die ersten Ergebnisse sind in Abbildung 6.13 zu sehen. Als Streumedium diente einfach auf der Rotationsscheibe eingespanntes Papier mit einer groben, durchaus unregelmäßigen Struktur und einem alles andere als räumlich konstanten Reflexionskoeffizienten. Es ist die Specklewanderungsgeschwindigkeit v_y in Abhängigkeit vom Ausfallswinkel β dargestellt. Es wurden jeweils 10 Messungen mit der DBF-Kamera durchgeführt und der Mittelwert gebildet, um die Streuung der Einzelmessungen um den Mittelwert bestimmen zu können.¹ Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung von gemessenen Daten mit der berechneten Winkelabhängigkeit der Specklewanderungsgeschwindigkeit (siehe Kapitel 4.1, Gleichung 4.3). Insbesondere ist die Streuung der Einzelmeßwerte sehr klein - d.h. schon aus einer Einzelmessung lassen sich genaue und zuverlässige Gradientenmessungen durchführen - die Aufnahme einer Zeitreihe eines zeitlich nicht konstanten Geschwindigkeitsgradienten ist ohne Schwierigkeiten möglich.

Das Signal-Rausch-Verhältnis des Keuzkorrelationsbildes dieser Messungen, aus dem die Specklewanderung bestimmt wurde, ist in Abbildung 6.14 dargestellt (weiter Erläuterungen siehe Kapitel 5.5). Durch die im Papier auftretende

¹Wie auch bei allen weiteren Auswertungen

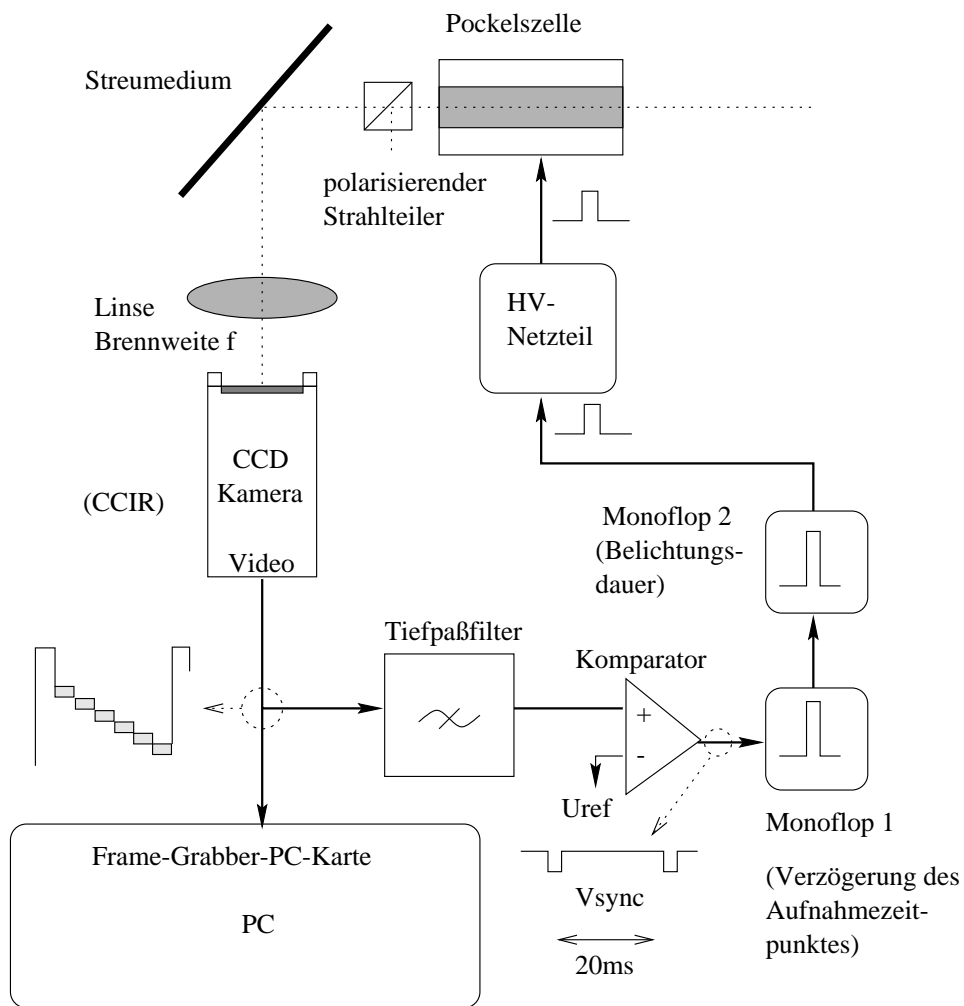


Abbildung 6.11: Synchronisation der Pockelszelle mit der Standard-CCIR-Kamera

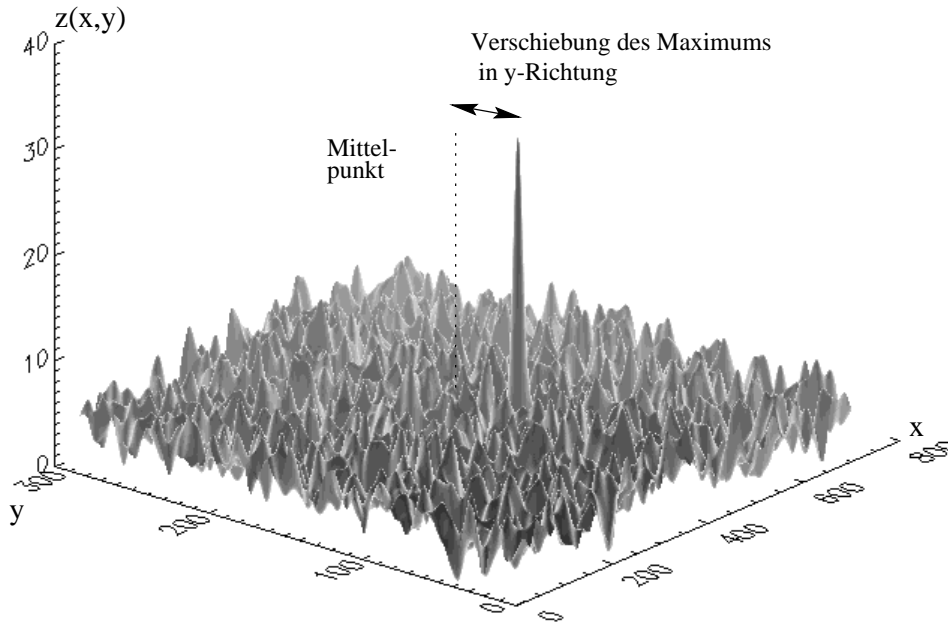


Abbildung 6.12: Beispiel eines Kreuzkorrelationsbildes von einer Rotationsmessung

Mehrfach- und Tiefenstreuung zeigte sich bei der Specklewanderung ein relativ starkes Kochen des Musters (Auftauchen und Verschwinden von Leuchtflecken im Specklemuster), wodurch durch das SNR schon relativ niedrig liegt. Ein Beispiel eines Kreuzkorrelationsbildes der Rotationsmessung ist in Abbildung 6.12 zu sehen.

Das Problem des Musterkochens wurde dann bei höheren Specklewanderungsgeschwindigkeiten deutlich. Die gleichen Rotationsmessungen wie oben wurden mit einer 2.5-fachen Winkelgeschwindigkeit durchgeführt. Das Ergebnis ist in Abbildung 6.15 zu sehen. Bei Specklewanderungsgeschwindigkeiten größer als 80 Pixel je Meßintervall τ (maximal möglich waren 143 Pixel) zeigten sich Ausfälle der Einzelmessungen - das Hauptmaximum des Kreuzkorrelationsbildes konnte nicht mehr eindeutig bestimmt werden ($SNR_{pp} < 1.5$). Erst als der Abstand zwischen zwei Specklebildern von $\tau = 10ms$ auf $\tau = 5ms$ reduziert wurde (die Specklegeschwindigkeit halbierte sich somit ebenfalls), konnten keine Ausfälle mehr beobachtet werden. Durch einen möglichst kurzen Abstand τ kann somit der Einfluß des Musterkochens minimiert werden.

In Abbildung 6.16 ist die Geschwindigkeitsgradientenkomponente $\frac{\partial v_y}{\partial x}$ in Abhängigkeit von der Periodendauer T der Rotation gezeigt - aufgenommen bei festen Winkel $\beta = 30^\circ$. Auch hier ist die Übereinstimmung zwischen gemessenen und berechneten Gradient (Gleichung 3.3 Kapitel 3.1) außerordentlich gut.

Der Gradient der Rotation ist ortsunabhängig, was die Meßergebnisse ebenfalls widerspiegeln sollten. Um dies zu überprüfen, wurden bei fester Streugeo-

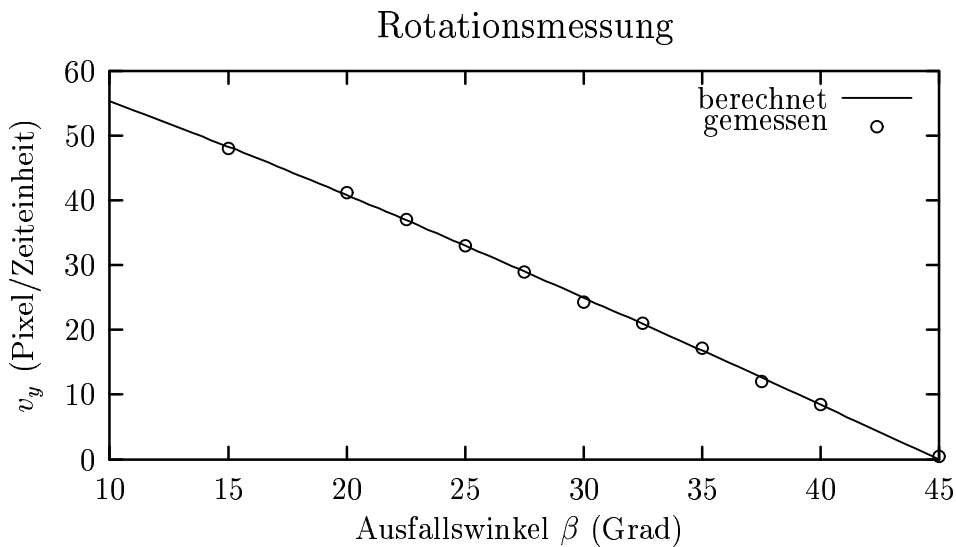


Abbildung 6.13: Vergleich der gemessenen und berechneten Specklewandergeschwindigkeit v_y bei der Rotation mit der Periodendauer $T = 5s$ in Abhängigkeit vom Ausfallswinkel β . (Kamera: DBF, Brennweite der Linse $f = 120mm$, $\tau = 10ms$, Streuung Einzelmeßwerte um den Mittelwert: $\sigma \leq 1 Pixel$)

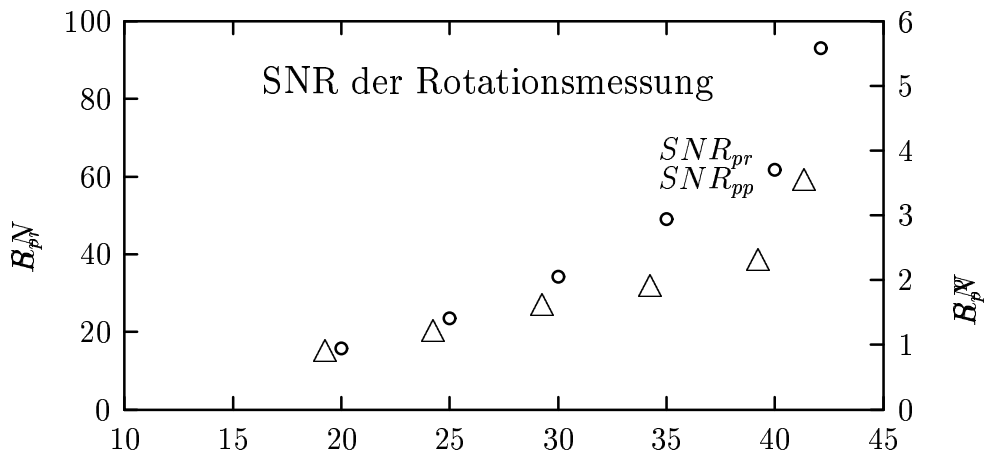


Abbildung 6.14: Darstellung der Signal-Rausch-Verhältnisse $SNR_{pp} = \frac{I_{Hauptpeak}}{I_{Nebenpeak}}$ und $SNR_{pr} = \frac{I_{Hauptpeak}}{\sqrt{\epsilon_{rms}}}$ der Ausfallswinkel β (Grad) von der Rotationsmessung aus Diagramm (6.13).

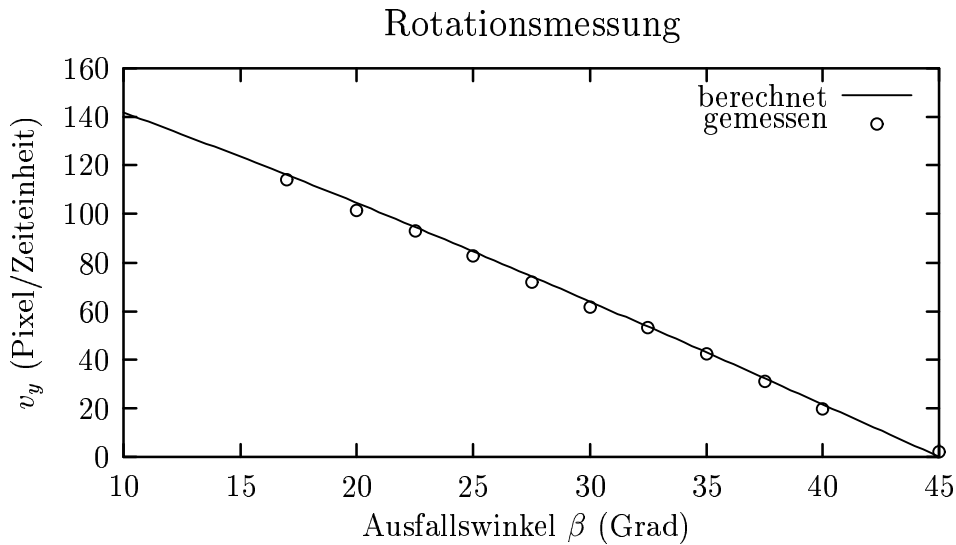


Abbildung 6.15: Vergleich der gemessenen und berechneten Specklewanderungsgeschwindigkeit v_y bei der Rotation mit der Periodendauer $T = 2s$ in Abhängigkeit vom Ausfallswinkel β . (Kamera: DBF, Brennweite der Linse $f = 120mm$, $\tau = 10ms$, Streuung der Meßwerte $\sigma \leq 2 \text{ Pixel}$). Bei $\beta \leq 25^\circ$ traten Ausfälle in den Meßreihen auf (bei $\beta = 20^\circ$ etwa 20 %, bei $\beta = 25^\circ$ etwa 10 %).

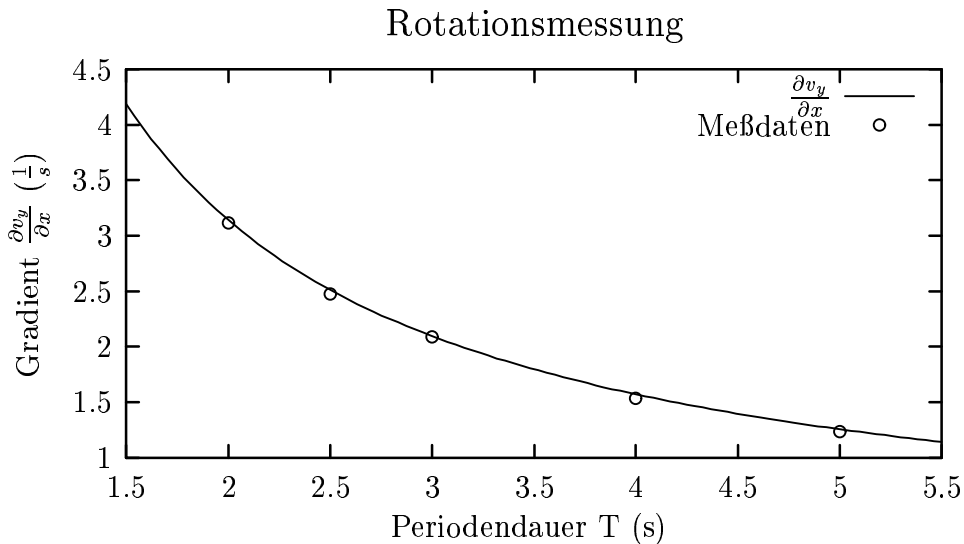


Abbildung 6.16: Vergleich des gemessenen und berechneten Gradienten $\frac{\partial v_y}{\partial x}$ bei der Rotation unter dem Ausfallswinkel $\beta = 30^\circ$ in Abhängigkeit von der Periodendauer T . (Kamera: DBF, Brennweite der Linse $f = 120mm$, $\tau = 10ms$, Streuung der Meßwerte $\sigma \leq 0.05 \frac{1}{s}$)

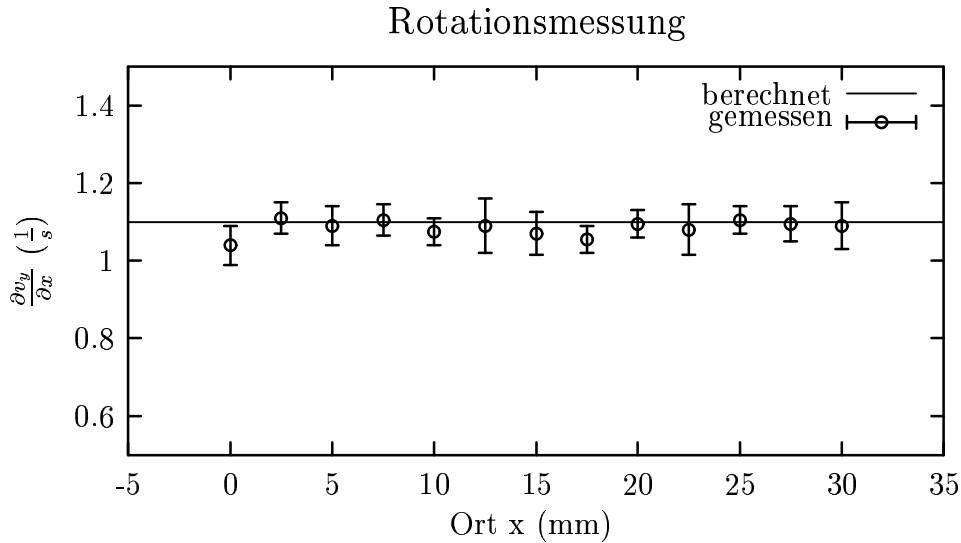


Abbildung 6.17: Bestätigung der Ortsunabhängigkeit der Gradientenkomponente $\frac{\partial v_y}{\partial x}$ bei der Rotation ($T = 5s$, $f = 120mm$, $\beta = 30^\circ$, Streumedium Papier).

metrie und Periodendauer der Rotation entlang der x-Achse der Rotationsscheibe die Geschwindigkeitsgradientenkomponente $\frac{\partial v_y}{\partial x}$ gemessen. Als Streumedium wurde zum einen wieder Papier, zum anderen eine (ungleichmäßig) aufgeraute Metallscheibe benutzt. Das Ergebnis mit Papier ist in Abbildung 6.17 zu sehen. Es zeigt sich, wie zu erwarten war, ein ortsunabhängiger Gradient.²

Das Signal-Rausch-Verhältnis des Kreuzkorrelationsbildes (Abbildung 6.18) zeigt sehr deutlich den Unterschied zwischen Papier und Metall als Streuer: Die Mehrfachstreuung bei Papier erzeugt ein deutlich schlechteres Kreuzkorrelationsbild durch Musterkochen im Vergleich zum Metall, wo praktisch keine Mehrfachstreuung des Lichtes auftritt.

Bemerkenswert ist die Tatsache, daß auch weit außerhalb des Zentrums der Rotation, wo die Geschwindigkeit der Rotationsscheibe und somit der Streupunkte große Werte annimmt (entsprechend schnell wandern Streupunkte in die Streufläche ein und wieder heraus), die Qualität (=SNR) der Messungen nicht nennenswert abnimmt.

Der Anteil der Streupunkte relativ zur Gesamtzahl der Streupunkte in der Streufläche, der während der Zeit τ in die Streufläche ein- und auswandert, kann mit folgender Gleichung abgeschätzt werden (ergibt sich unter Annahme einer homogenen und kreisförmigen Beleuchtung aus einfachen geometrischen Überlegungen):

$$k = 1 - \frac{v\tau \sqrt{R^2 - \frac{(v\tau)^2}{4}} + 2R^2 \arcsin \frac{v\tau}{2R}}{\pi R^2}$$

mit v als Wanderungsgeschwindigkeit der Streufläche und R als Radius der Streufläche. Das Maximum $k_{max} = 1$ liegt bei $\tau = 0$, das Minimum $k_{min} = 0$

²Die Streuung der Einzelmeßwerte um den Mittelwert bei der Rotation wurde zu einem nicht unerheblichen Teil durch eine unregelmäßige Rotationsgeschwindigkeit (Reibung des Kugellagers der Scheibhalterung, Schlupf des Riemens) verursacht.

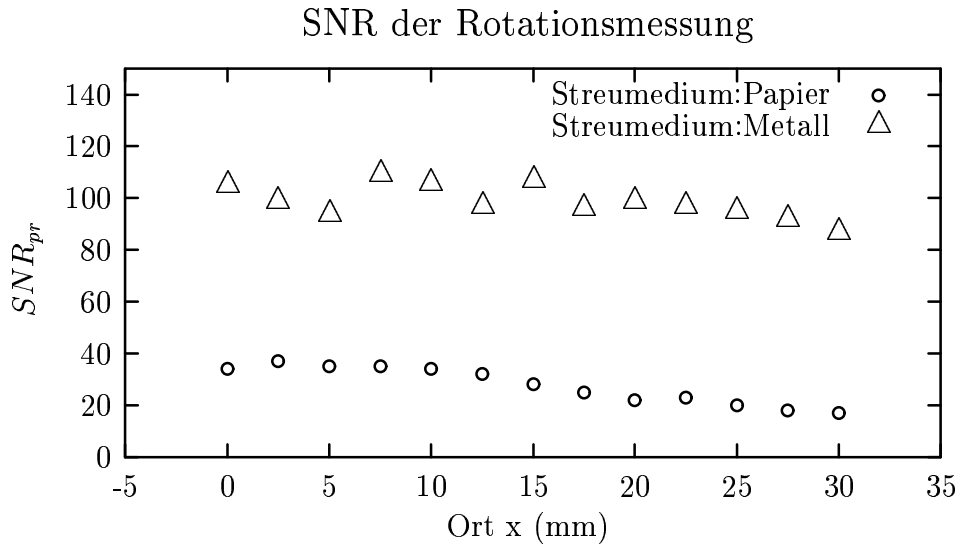


Abbildung 6.18: Darstellung des Signal-Rausch-Verhältnisses $SNR_{pr} = \frac{I_{Peak}}{\sqrt{\epsilon_{rms}}}$ der Kreuzkorrelationsfunktion von der Rotationsmessung aus Diagramm 6.17. Das Streumedium Papier hat wegen der Mehrfachstreuung ein deutlich schlechteres SNR als das Streumedium Metall, wo praktisch keine Mehrfachstreuung auftritt ($T = 5s$, $\tau = 10ms$).

bei $v\tau = 2R$. Bei einer Periodendauer der Rotation von $T = 5s$, einem Abstand der Streufläche vom Zentrum der Rotation von $x = 25mm$ und einem zeitlichen Abstand beider an der Kreuzkorrelation beteiligten Bilder $\tau = 10ms$ beträgt der Anteil der Streupunkte, die in beiden Specklebildern auftauchen, nur noch $k = 21\%$. Der Vergleich mit Abbildung 6.18 zeigt aber keine deutliche Verschlechterung der statistischen Eigenschaften der Kreuzkorrelation. Ein völlige Dekorrelation des Specklebildes ($k = 0$) ist bei $x = 60mm$ zu erwarten.

In Kapitel 2.4 wurde dem sich bewegenden Specklemuster eine Kohärenzzeit τ_c zugeordnet. Für das obige Beispiel beträgt sie $\tau_c = 12ms$. Aus den gemessenen Specklebildern ergab sich eine Kohärenzzeit von $\tau_c = 15ms$. Der berechnete Kochparameter (Gleichung 2.23) für diese Messung beträgt $\alpha = 1.2$, der gemessene beträgt $\alpha = 1.5$, für den nach Kapitel 2.4 dominierendes Kochen vorausgesagt wird, welches durch rein optische Betrachtungen der Specklebilder auch beobachtet wurde, aber eben nicht durch das SNR des Kreuzkorrelationsbildes ausreichend wiedergegeben wird.

Lediglich die normierte Höhe der Gaußspitze (abzüglich des konstanten und normierten Untergrundes $\rightarrow g^{(2)} - 1$, siehe Kapitel 5.3) des Kreuzkorrelationsbildes zeigt eine nennenswerte Abnahme bei zunehmender Wanderungsgeschwindigkeit der Streupunkte, wie Abbildung 6.19 zeigt.

Zum Abschluß soll noch die Messung der Specklewanderungsgeschwindigkeit mit der normalen CCIR-TV-Kamera gezeigt werden. Das Ergebnis ist in Abbildung 6.20 zu sehen und unterscheidet sich in der Qualität nicht von den vorherigen Messungen mit der DBF-Kamera.

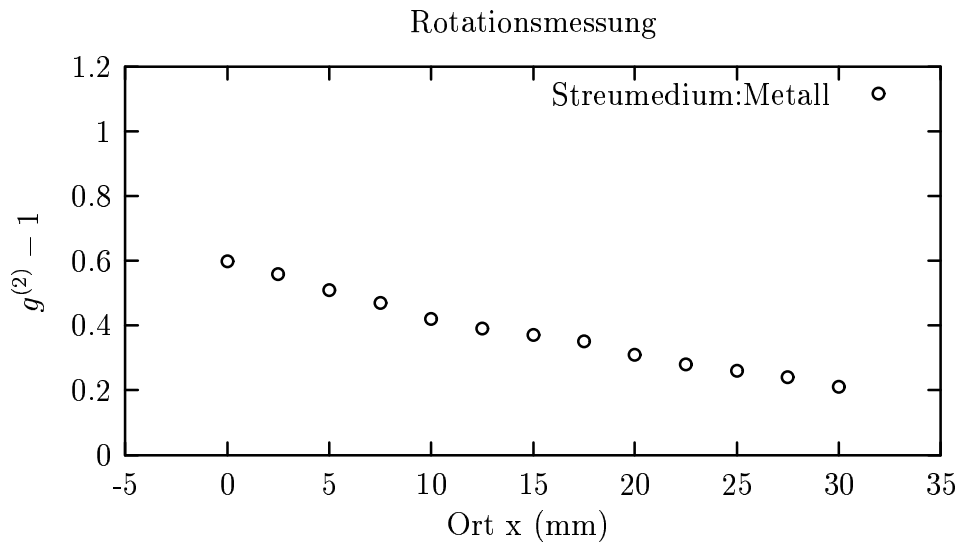


Abbildung 6.19: Normierte Höhe des Maximums des Kreuzkorrelationsbildes relativ zum konstanten Untergrund (hier =1) in Abhängigkeit vom Abstand der Streufläche zum Zentrum der Rotation.

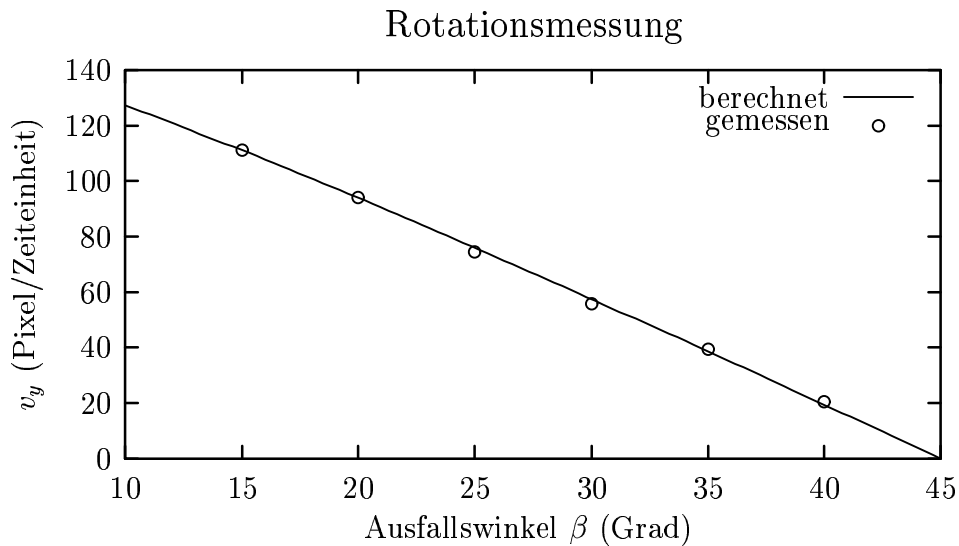


Abbildung 6.20: Vergleich der gemessenen und berechneten Specklewanderungsgeschwindigkeit v_y bei der Rotation mit der Periodendauer $T = 4s$ in Abhängigkeit vom Ausfallswinkel β . (**Kamera: TV**, Brennweite der Linse $f = 80mm$, $\tau = 20ms$, Streuung der Meßwerte $\sigma \leq 1 Pixel$)

Untere Nachweisgrenze:

Der kleinste, noch nachweisbare Drehwinkel der Rotation $\Delta\phi = \omega\Delta t = \frac{\partial v_y}{\partial x}\Delta t$ ist bei einer Brennweite $f = 0.12m$, einer Geometrie $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 10^\circ$ und einer minimalen Verschiebung beider Specklebilder um 1 Pixel je Zeitintervall Δt (kleinste, noch meßbare Specklewanderung):

$$\Delta\phi_{UNG} = 0.01^\circ$$

6.5.2 Dehnung

In der nächsten Versuchsreihe wird die Dehnung eines flachen Gummibandes untersucht. Zur Messung der Gradientenkomponente $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ (siehe Kapitel 3.2 und Gleichung 3.8) wird wieder ein geometrischer Aufbau ähnlich dem der Rotation benutzt (Abbildung 6.21). Die Querkontraktion $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ kann mit dieser Geometrie nicht gemessen werden. Um den Gradient der Querkontraktion messen zu können, darf der Streuvektor \vec{q} nicht in der x-z-Ebene liegen.

Das Gummiband ist an der einen Seite fest eingespannt. Die dynamische Dehnung wird mit Hilfe eines Lautsprechers durchgeführt, an dessen Membran (genauer an der sog. dustcap) das andere Ende des Dehnungsbandes befestigt ist. Der Lautsprecher und das Dehnungsband einschließlich Halterung können in x-Richtung verschoben und bezüglich Ausfalls- und Einfallswinkel mittels eines Drehtisches eingestellt werden (Abbildung 6.22). Auch hier wird zur Vereinfachung der Ausfallswinkel $\beta = 90^\circ - \alpha$ gewählt.

Der Lautsprecher sollte eine mit der Zeit linear ansteigende Zugkraft auf das Dehnungsband ausüben. Dies wurde durch eine dreieckförmige Spannung am Lautsprecher erreicht, da die auslenkende Kraft F proportional zum in der Schwingspule fließenden Strom I ist. Dieser Kraft wirkt eine rücktreibende Kraft der Membranaufhängung (Sicke) entgegen. Durch das Dehnungsband wird diese rücktreibende Kraft lediglich erhöht.

Die Dreieck-Spannung mit einer Periodendauer T wird mit Hilfe eines Digital-Analog-Wandlers mit nachgeschaltetem Leistungsverstärker realisiert. Der DA-Wandler ist mit einem zweiten PC verbunden, der dessen Ansteuerung übernimmt. Die Geschwindigkeit der Lautsprechermembran und somit des äußeren Endes des Dehnungsbandes ist dann $v_d = \frac{2D}{T}$ mit D als gesamten Hub der Membran während einer Periode T .

Der Hub D der Lautsprechermembran wird mit einer Mikrometerschraube gemessen. Dabei wird das Dehnungsband mit dem Laserstrahl beleuchtet und das Specklebild beobachtet. Bei einer bestimmten Lautsprecherspannung wird die Mikrometerschraube auf die Membran gefahren, bis sich das Specklemuster bewegt. Bei verschiedenen Spannungen läßt sich dann der Hub D bestimmen. Es wurde bei den Messungen mit einem gesamten Hub von $D = 0.4 \dots 1mm$ gearbeitet.

Die gesamte Kamera-Steuerung und Bildaufnahme wird wieder mit einem PC realisiert (siehe Kapitel 6.5.1). Es war wegen der Reproduzierbarkeit der Messungen wünschenswert, bei einer bestimmten Auslenkung des Lautsprechers messen zu können. Dazu kann im zweiten PC eine Trigger-Schwelle eingestellt werden, bei deren Erreichen ein Synchronisation-Signal an den Kamera-PC gegeben, und die Messung dort gestartet wird (siehe Abbildung 6.23).

Bei den folgenden Messungen wurde dann zu einem bestimmten Zeitpunkt ein Ausschnitt der gesamten Dehnung gemessen.

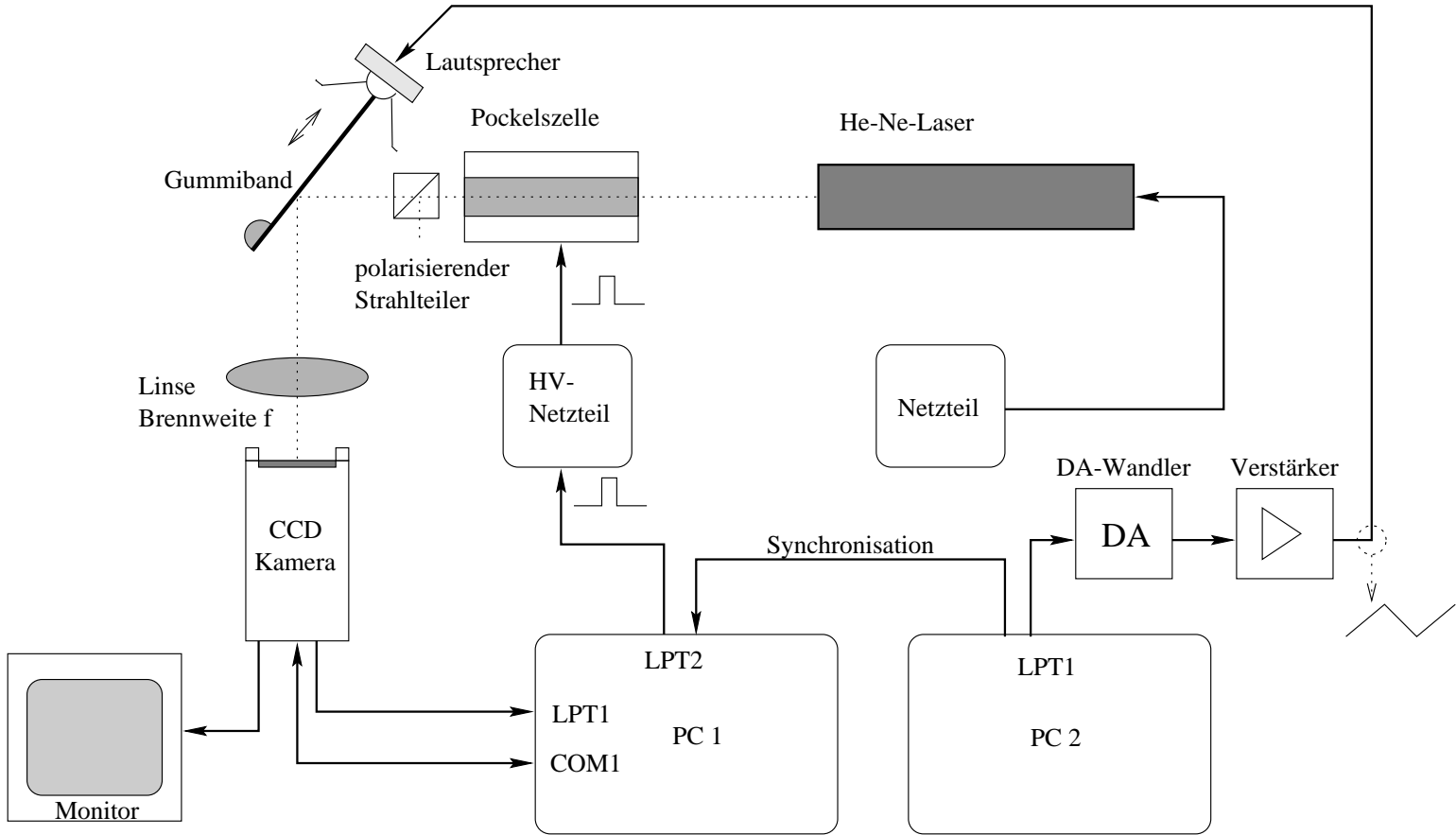


Abbildung 6.21: Versuchsanordnung der Dehnungsmessung

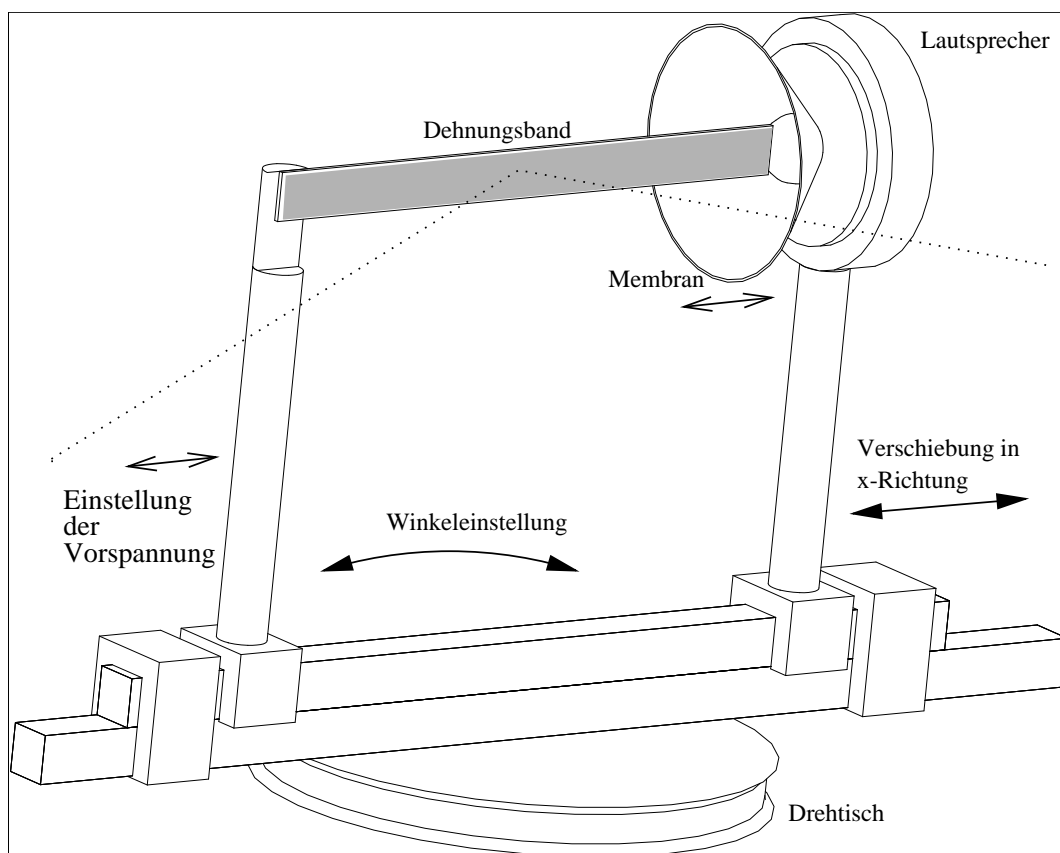


Abbildung 6.22: Ausschnitt aus Abbildung (6.21)

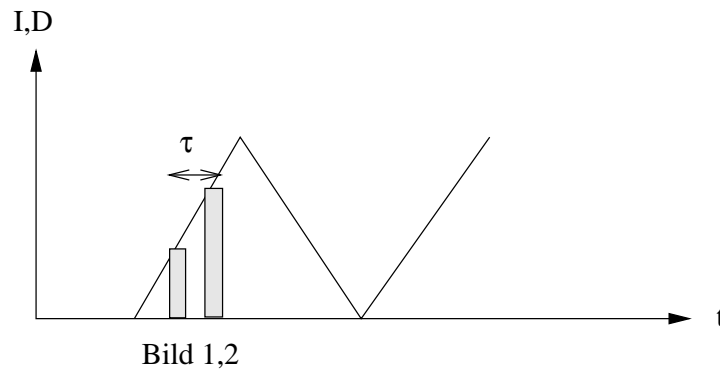


Abbildung 6.23: Auslenkung der Lautsprechermembran D durch den in der Schwingspule fließenden Strom I. Zum Zeitpunkt t_1 wird das erste Bild, zum Zeitpunkt $t_2 = t_1 + \tau$ wird das zweite Bild gemessen

In Abbildung 6.24 sind die Ergebnisse der ersten Messungen zu sehen. Aufgetragen ist die gemessene und berechnete Specklewanderungsgeschwindigkeit (Kapitel 4.2, Gleichung 4.20) in Abhängigkeit vom Ausfallswinkel β bei fester Hubgeschwindigkeit v_d der auslenkenden Lautsprecher-Membran. Wie bisher ist der Einfallswinkel $\beta = 90^\circ - \alpha$. Die Winkelabhängigkeit der Specklewanderungsgeschwindigkeit stimmt sehr gut mit der aus Gleichung 4.20 berechneten überein. Auch die Streuung der Einzelmesswerte vom Mittelwert ist vernachlässigbar klein. Die Specklewanderungsgeschwindigkeit setzt sich aufgrund des geometrischen Aufbaus sowohl aus der senkrechten als auch der parallelen Komponente von \vec{k}_a zusammen (schiefes Wandern - siehe Kapitel 2.2).

In Abbildung 6.25 wird bei veränderlicher Hubgeschwindigkeit v_d die Gradientenkomponente $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ gemessen. Auch hier zeigt sich eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit den aus Gleichung 4.21 berechneten Werten.

Bei den obigen Messungen lag schiefes Wandern von \vec{k}_a vor. Für Abbildung 6.26 wird eine geometrische Anordnung verwendet (die sich aus Abbildung 6.21 ableitet), bei der nur zu dem gestreuten Vektor \vec{k}_a senkrecht wandern von \vec{k}_a auftritt. Der Ausfallswinkel ist somit $\beta = 90^\circ$, und der Einfallswinkel α wird variiert. Dies geschieht durch Verschieben des Spiegels 3 in x-Richtung und Veränderung des Drehwinkels dieses Spiegels, so daß bei jedem Winkel α immer der gleiche Ort auf dem Dehnungsband beleuchtet wird.

In Abbildung 6.27 und 6.28 sind die Ergebnisse der Dehnungsmessung dargestellt. Aufgetragen ist die Specklewanderungsgeschwindigkeit gegen den Einfallswinkel α . Prinzipiell erhält man wieder genaue Meßergebnisse, aber im Vergleich zu den obigen Messungen mit schiefer Wanderung von \vec{k}_a fällt die Streuung der Einzelmesswerte stärker ins Gewicht. Das schiefe Wandern darf also nicht als zu vermeidender Störfaktor angesehen werden, sondern trägt zur Verbesserung der Meßgenauigkeit durch Vergrößern der Specklewanderungsgeschwindigkeit bei gleichem Gradienten bei.

Es zeigte sich bei den Gradientenmessungen, daß die Dehnung über den gesamten Dehnbereich (tatsächlich wurde ja nur ein kurzer Ausschnitt der Deh-

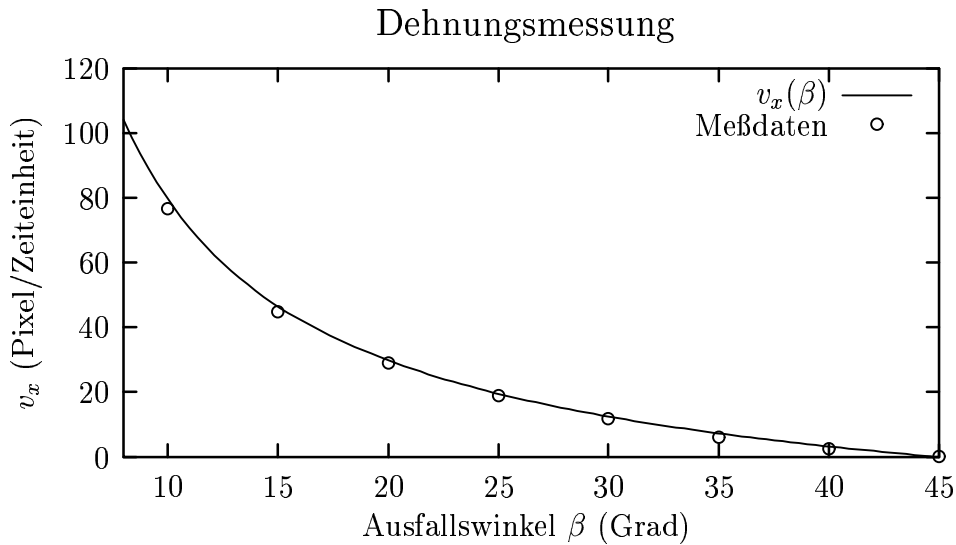


Abbildung 6.24: Messung der Specklewanderungsgeschwindigkeit v_x in Abhängigkeit vom Winkel β beim Dehnungsexperiment mit einem flachen Gummiband. $f = 120mm$, $T = 250ms$, $\tau = 30ms$, $v_d = 3.9\frac{mm}{s}$, $L = 75mm$, $\sigma \leq 1$ Pixel

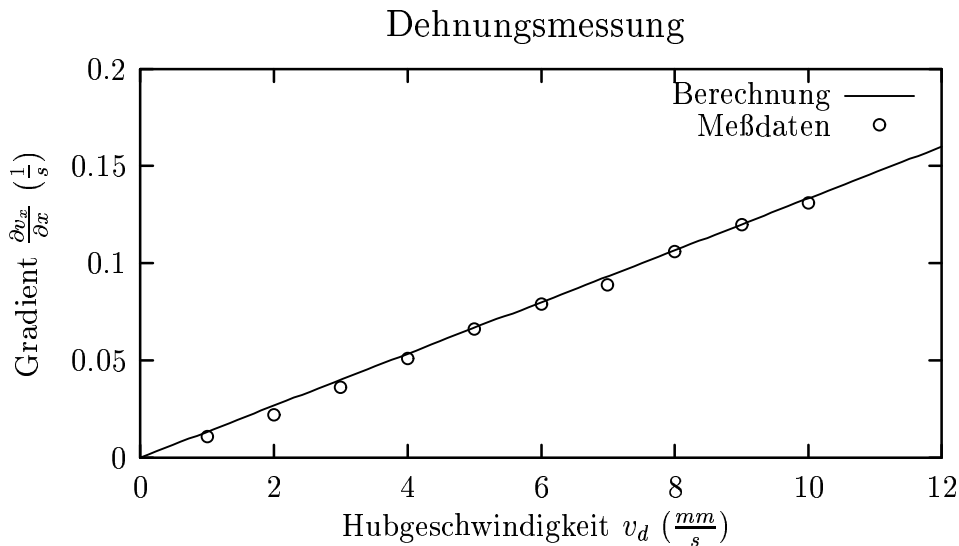


Abbildung 6.25: Vergleich von gemessenen und berechneten Gradienten $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ bei der Dehnungsmessung in Abhängigkeit von der Hubgeschwindigkeit v_d (also bei $x = L$). Gemessen wurde bei $\alpha = 30^\circ$ und $\beta = 90^\circ$. ($f = 120mm$, $L = 75mm$, $\sigma \leq 0.01\frac{1}{s}$)

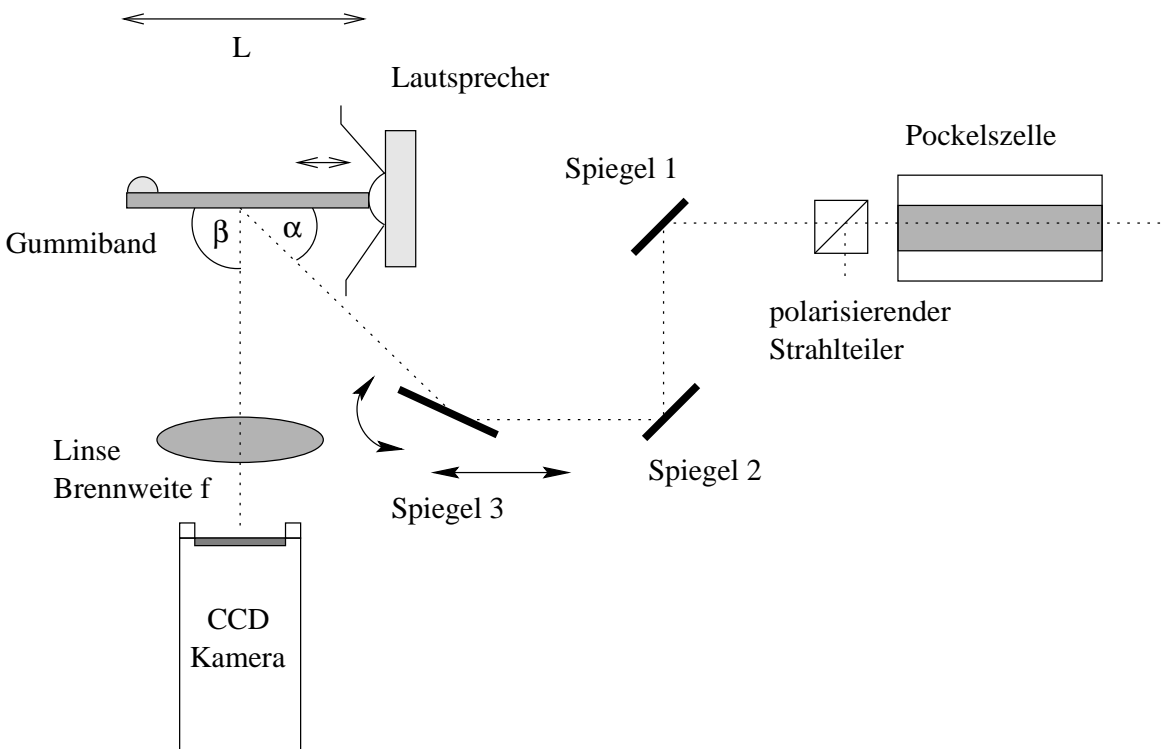


Abbildung 6.26: Dehnungsmessung unter senkrechter Beobachtung (kein schiefes Musterwandern)

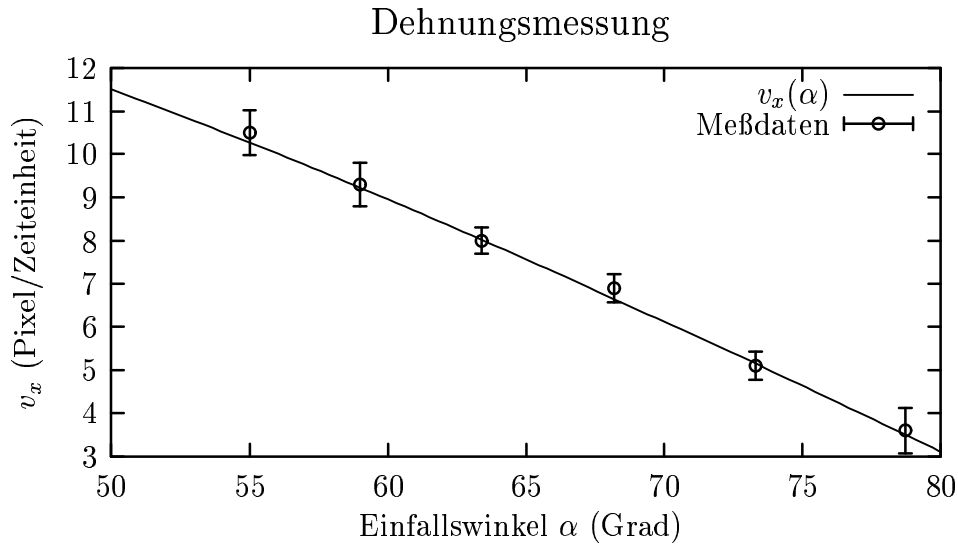


Abbildung 6.27: Messung der Specklewanderungsgeschwindigkeit v_x in Abhängigkeit von Einfallswinkel α . Der Ausfallswinkel ist $\beta = 90$, d.h. nur senkrecht Musterwandern - $s_k = 1$. ($f = 120\text{mm}$, $T = 250\text{ms}$, $\tau = 30\text{ms}$, $v_d = 4.1\frac{\text{mm}}{\text{s}}$, $L = 75\text{mm}$).

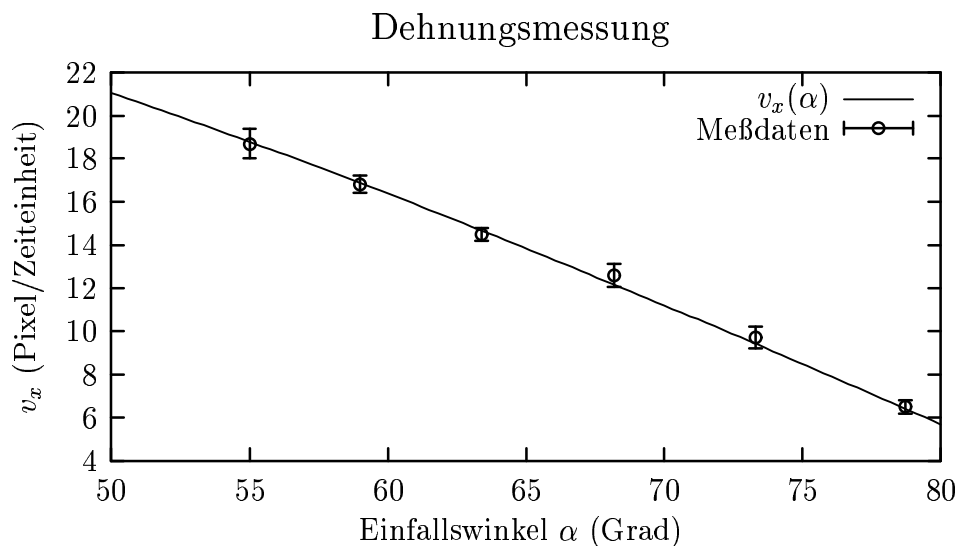


Abbildung 6.28: Wie Abbildung 6.27), nur $T = 125\text{ms}$, $v_d = 7.5\frac{\text{mm}}{\text{s}}$, $L = 75\text{mm}$.

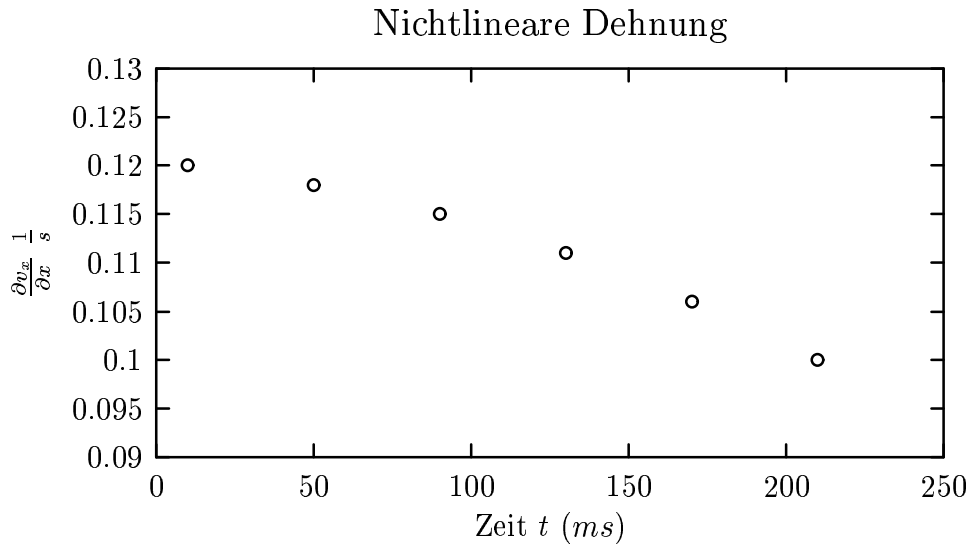


Abbildung 6.29: Aufnahme einer Zeitreihe um die Nichtlinearität des bei der Dehnungsmessung verwendeten Gummibandes zu zeigen. Es wurde jeweils zu verschiedenen Zeiten der Auslenkung des Gummibandes gemessen. Meßparameter: $f = 120\text{mm}$, $\tau = 30\text{ms}$, $T = 500\text{ms}$, $\beta = 30^\circ$

nung gemessen und daraus der Gradient berechnet) nicht konstant war. Der Dehnungsgradient hatte somit ein zeitabhängiges Verhalten, welches in einer Zeitreihe gemessen wurde und in Abbildung 6.29 dargestellt ist. Es wurde zu bestimmten Zeitpunkten ein Doppelbild (Abstand der beiden Bilder $\tau = 30\text{ms}$) aufgenommen und der Gradient aus der Specklewanderungsgeschwindigkeit bestimmt. Bei geringer Auslenkung des Lautsprechers und des Gummibandes war die Dehnfähigkeit größer und entsprechend der Gradient. Mit zunehmender Auslenkung der Lautsprechermembran nahm die Dehnfähigkeit ab und der Gradient sinkt. Die Ursache liegt in der nichtlinearen Rückstellkraft des Gummibandes und zum Teil in der Membranaufhängung des Lautsprechers.

Ein Beispiel eines Kreuzkorrelationsbildes, wie es typischerweise bei der Dehnungsmessung auftrat, ist in Abbildung 6.30 zu sehen.

Untere Nachweisgrenze:

Die kleinste noch nachweisbare relative Dehnung $\frac{dl}{L} = \frac{v_d}{L} \Delta t = \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta t$ ist bei einer Brennweite $f = 0.12\text{m}$, einer durch $\alpha = 80^\circ$ und $\beta = 10^\circ$ festgelegten Streugeometrie und einer minimalen Verschiebung beider Specklebilder um 1 Pixel je Zeitintervall Δt (kleinste noch meßbare Specklewanderung):

$$\left. \frac{dl}{L} \right|_{UNG} = 2 \cdot 10^{-5}$$

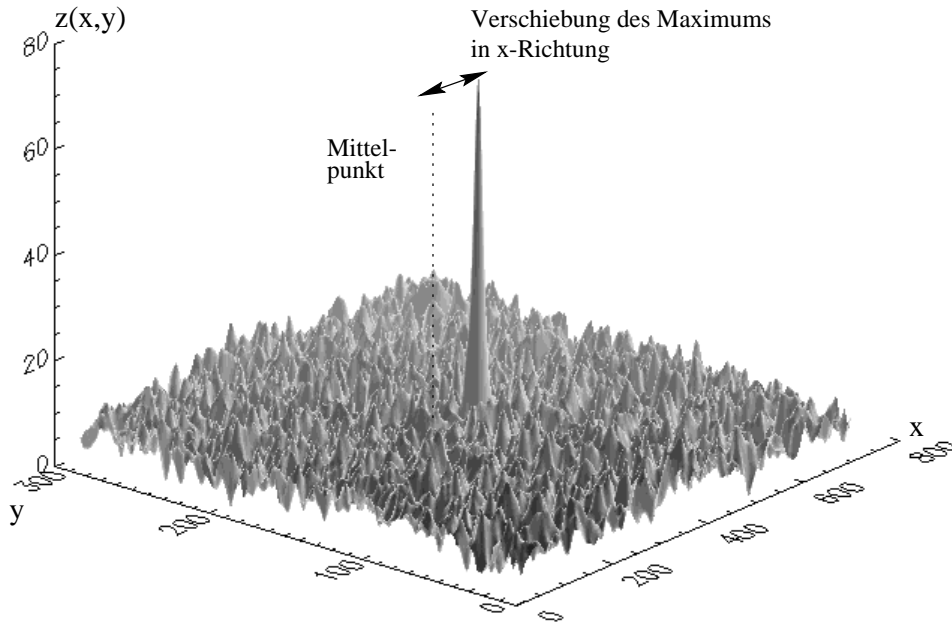


Abbildung 6.30: Kreuzkorrelationsbild einer Dehnungsmessung

Bei der Geometrie $\beta = 90^\circ$ erhält man eine deutlich schlechtere untere Nachweisgrenze:

$$\left. \frac{dl}{L} \right|_{UNG} = 1 \cdot 10^{-4}$$

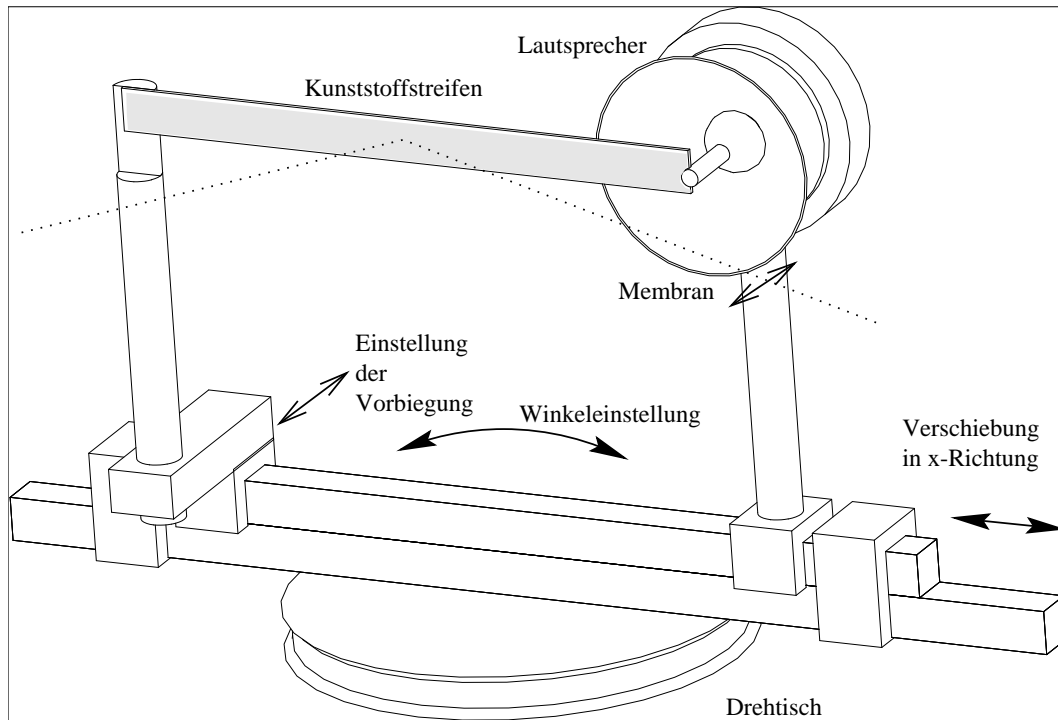


Abbildung 6.31: Ausschnitt von Abbildung 6.32

6.5.3 Biegung

Für die Biegemessungen wird ein elastischer, flacher Kunststoffstab benutzt (Kabelbinder). Das eine Ende ist fixiert, das andere über einen Nylonfaden mit der Membran eines Lautsprechers verbunden. Prinzipiell erhält man wieder den gleichen Versuchsaufbau wie bei der Dehnungsmessung nur mit dem Unterschied, daß der Lautsprecher um 90 Grad gedreht ist - wie in Abbildung 6.31 dargestellt. Die gesamte Versuchsanordnung ist in Abbildung 6.32 zu sehen. Das Meßprinzip ist das gleiche wie bei der Dehnung, die Durchführung der Messungen ähnlich (Kapitel 6.5.2).

Der einzige Unterschied zu allen bisherigen Gradientenmessungen ist, daß die Gradientenkomponenten der Biegung **ortsabhängig** sind. Für reproduzierbare Messungen ist der Kunststoffstab mit einer Ortsmarkierung versehen. Mit obiger Meßgeometrie kann nur die Gradientenkomponente $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ beobachtet werden, nicht aber die Komponente $\frac{\partial v_x}{\partial z}$.

Die erste Messung, die hier gezeigt werden soll, gibt diese Ortsabhängigkeit des Gradienten und der Specklewanderungsgeschwindigkeit v_x wieder. In Abbildung 6.33 sind die gemessenen und berechneten Specklegeschwindigkeiten (siehe Gleichung 4.26) in Abhängigkeit vom Ort x der Biegelinie bei festen Ausfall- und Einfallswinkel ($\beta = 40^\circ$, $\alpha = 50^\circ$) gegenübergestellt. Die berechneten Werte konnten bestätigt werden. Auch hier ist die Streuung der Einzelmesswerte um den Mittelwert vernachlässigbar klein.

Durch die Einspannung des Kunststoffstabes ist eine (statische) Vorbiegung

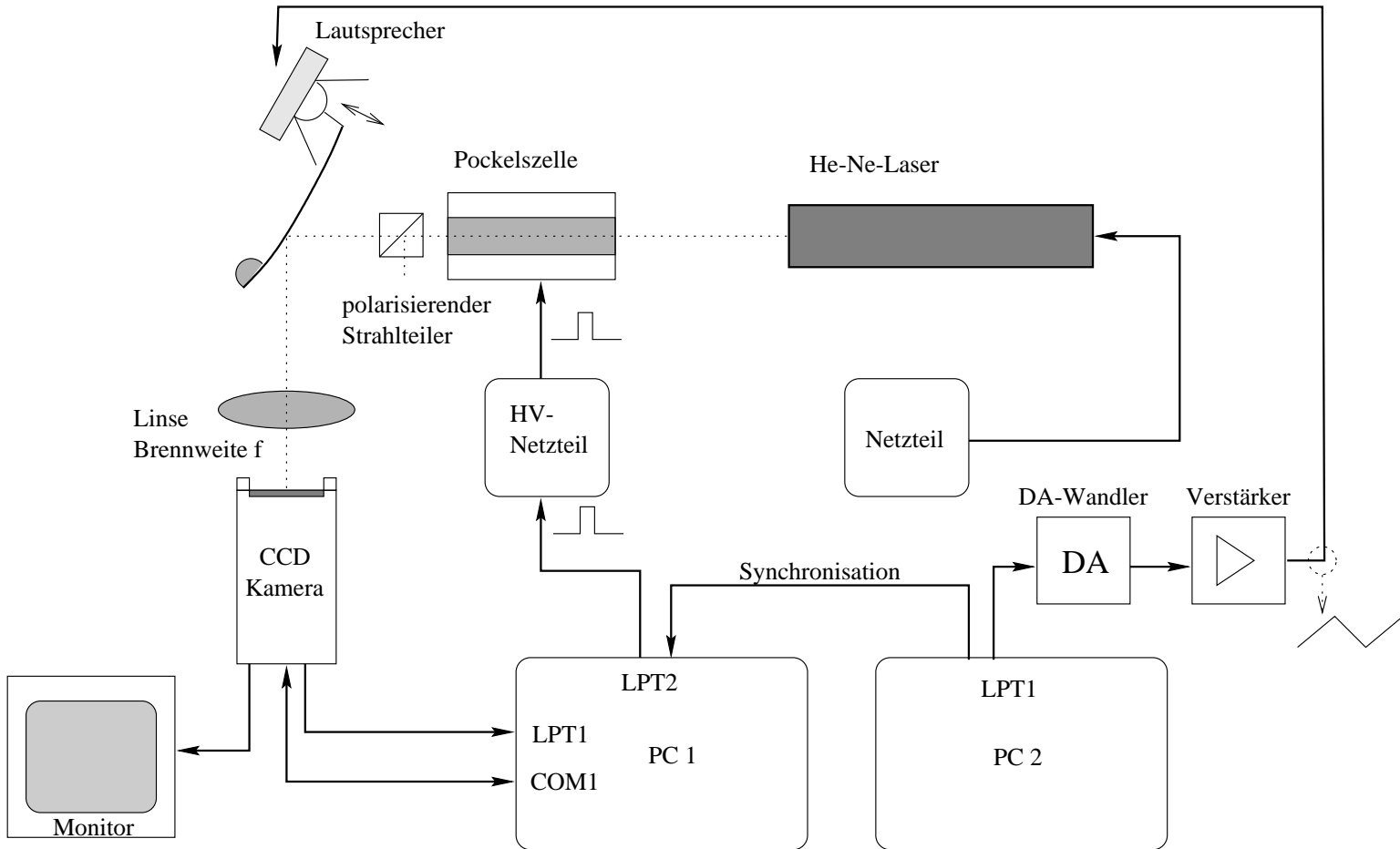


Abbildung 6.32: Versuchsaufbau der Biegemessung

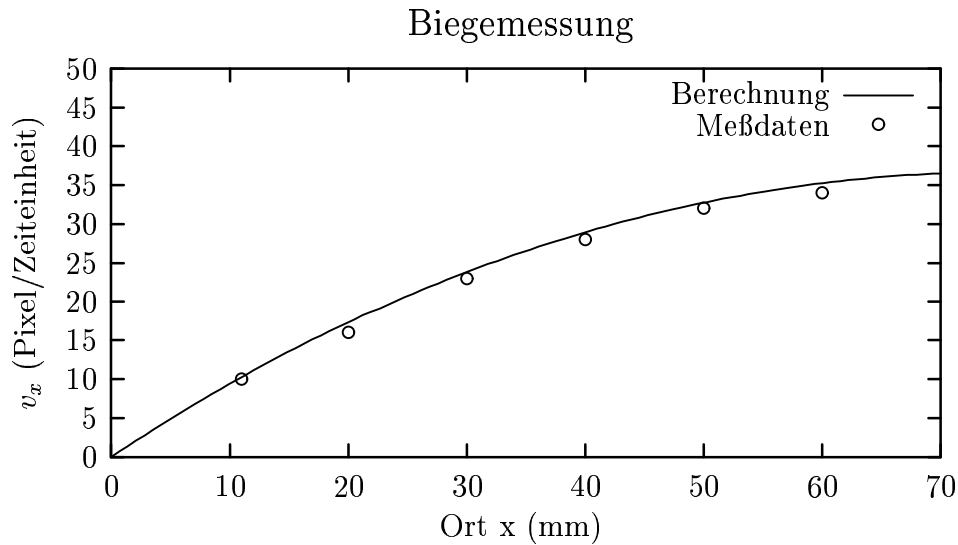


Abbildung 6.33: Gegenüberstellung von Messung und Berechnung der Specklewanderungsgeschwindigkeit v_x bei der Biegung in Abhängigkeit vom Ort x (entlang der Biegelinie). Meßparameter: $f = 120\text{mm}$, $\tau = 40\text{ms}$, $\beta = 40^\circ$. Streuung der Meßwerte $\sigma \leq 0.5$ Pixel.

vorhanden, wodurch Einfalls- und Ausfallwinkel abhängig von der Biegelinie werden, was durch die Gleichungen 4.33 berücksichtigt wird.

Da der Kunststoffstab praktisch durchscheinend war, zeigten die Messungen durch Tiefen- und Mehrfachstreuung im Material ein erhebliches Specklekothen, welches zu sehr schlechten Kreuzkorrelationsbildern führte. Deswegen wurde der Kunststoffstab mit Graphit beschichtet, womit hervorragende Meßergebnisse erzielt wurden.

In Abbildung 6.34 (mit $\beta = 20^\circ$) und Abbildung 6.35 (mit $\beta = 40^\circ$) ist die Aufnahme der Gradientenkomponente $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ als Funktion vom Ort x gezeigt (siehe auch Gleichung 4.27). Auch hier konnten die berechneten Gradienten bestätigt werden.

Die Winkelabhängigkeit der Specklewanderungsgeschwindigkeit wird schließlich in Abbildung 6.36 gezeigt und bezüglich der Berechnung (und den durchgeführten Näherungen) in Kapitel 4.3 bestätigt.

In Abbildung 6.37 ist nochmal ein typisches Kreuzkorrelationsbild der Biegemessung dargestellt.

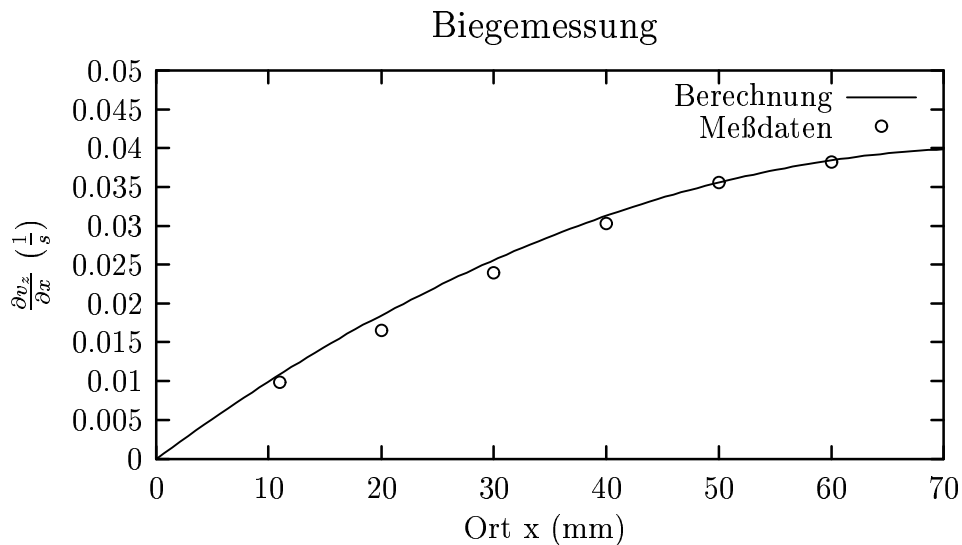


Abbildung 6.34: Gemessene und berechnete Gradientenkomponente $\frac{\partial v_z}{\partial x}$ in Abhängigkeit vom Ort x , die als einzige im Biegungsexperiment beobachtbar war. Meßparameter: $f = 120\text{mm}$, $\tau = 40\text{ms}$, $\beta = 20^\circ$. Streuung der Meßwerte $\sigma \leq 0.001\frac{1}{s}$.

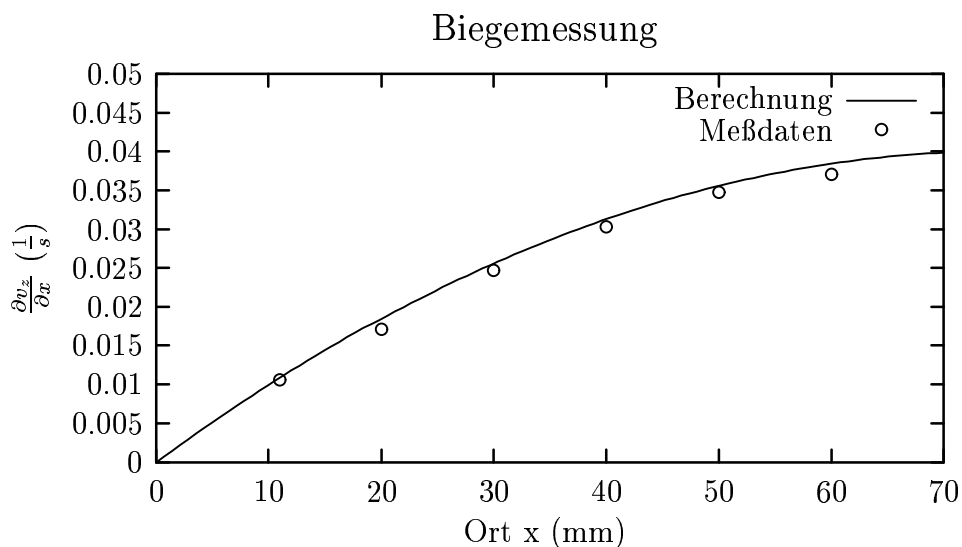


Abbildung 6.35: Gemessene und berechnete Gradientenkomponente $\frac{\partial v_z}{\partial x}$ in Abhängigkeit vom Ort x . Meßparameter: $f = 120\text{mm}$, $\tau = 40\text{ms}$, $\beta = 40^\circ$. Streuung der Meßwerte $\sigma \leq 0.001\frac{1}{s}$.

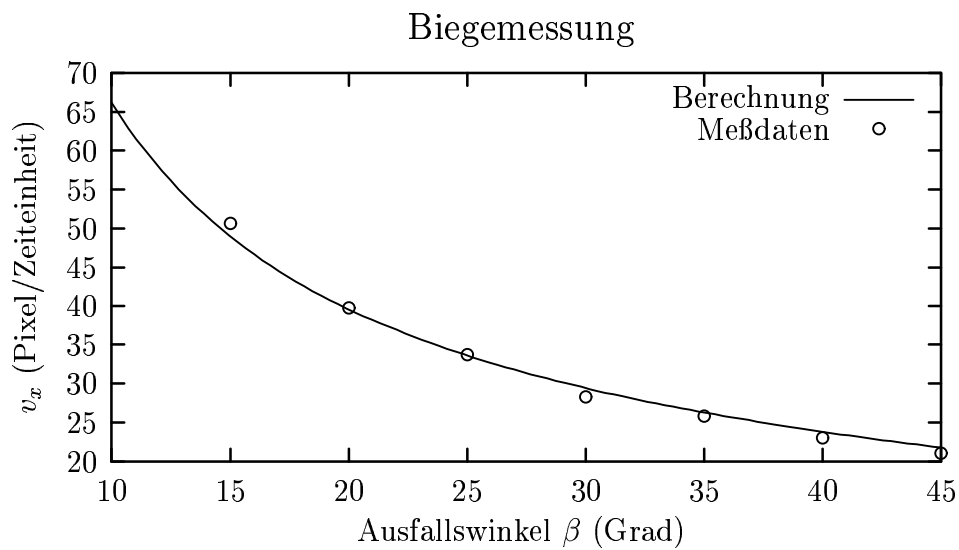


Abbildung 6.36: Vergleich von berechneter und gemessener Specklewanderungsgeschwindigkeit v_x der Biegung in Abhängigkeit vom Ausfallswinkel β . ($f = 120\text{mm}$, $\tau = 40\text{ms}$, $T = 500\text{ms}$, $x = 30\text{mm}$). Streuung der Meßwerte: $\sigma \leq 0.5$ Pixel.

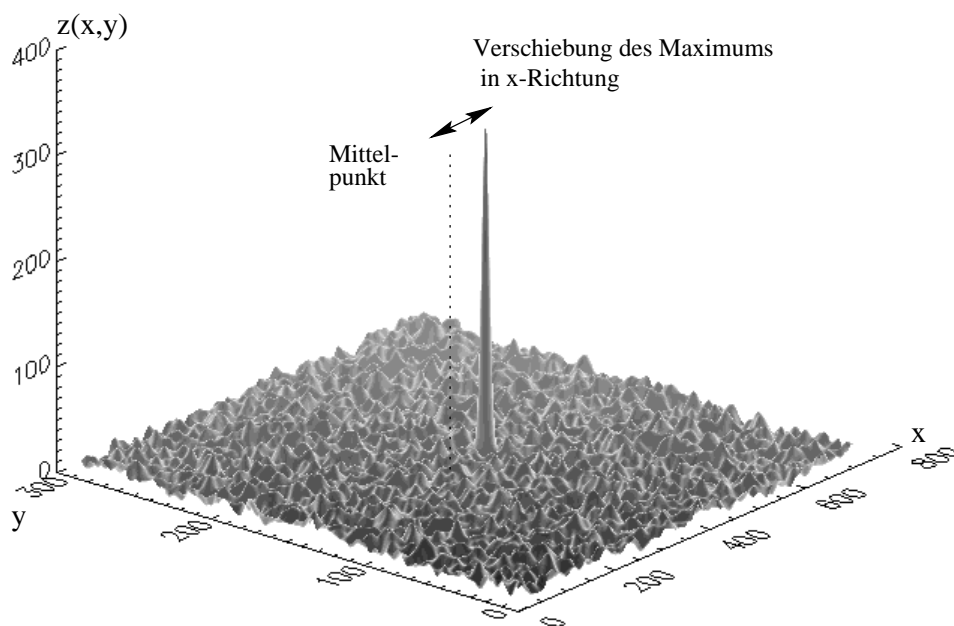


Abbildung 6.37: Typisches Kreuzkorrelationsbild einer Biegemessung

Kapitel 7

Diskussion der Meßmethode und Zusammenfassung

Mit der in dieser Arbeit vorgestellten Meßmethode konnten einzelne Geschwindigkeitsgradientenkomponenten der Rotation, der Dehnung und der Biegung mit hoher Genauigkeit und Reproduzierbarkeit gemessen werden.

Die Meßmethode ist im Vergleich zu anderen Meßmethoden (z.B. Speckle-Interferometrie oder Holographie) bezüglich Aufbau und Justage wenig anspruchsvoll; die Realisierung ist mit preisgünstigen Komponenten möglich (z.B. mit Diodenlaser als Lichtquelle).

Schon die Aufnahme und Auswertung eines Doppelbildes genügt i.a. für die genaue und zuverlässige Bestimmung einer Gradientenkomponente. Für eine gute Statistik der Auswertung ist keine Mittelwertbildung erforderlich, so daß die Aufnahme einer Zeitreihe des Gradienten möglich ist.

Im Gegensatz zur Speckle-Interferometrie oder Holographie, wo die Verformung eines großen Teils der Oberfläche aufgenommen wird, wird bei dieser Meßmethode der Gradient an einem durch den Laserstrahldurchmesser begrenzten Ort gemessen. Weiterhin darf sich im Gegensatz zur Speckle-Interferometrie oder Holographie das Meßobjekt bewegen, ohne daß sich daraus die Bestimmung des Gradienten verschlechtert. Jedoch muß die Streugeometrie möglichst genau bekannt sein, da die Specklewanderungsgeschwindigkeit erheblich durch die Streugeometrie beeinflusst wird, insbesondere durch den Effekt des schiefen Wanderns des gestreuten Vektors \vec{k}_a im k-Raum. Dieser Effekt kann aber gleichzeitig zur Erhöhung der unteren Nachweisgrenze der Gradientenmessung ausgenutzt werden.

Der kleinste und der größte meßbare Gradient wird praktisch nur durch den zeitlichen Abstand τ der beiden aufgenommenen Bilder und der Meßgeometrie bestimmt. Die Wahl der Brennweite der Linse ist eingeschränkt. Für eine gute Statistik des Kreuzkorrelationsbildes, aus dem die Specklewanderungsgeschwindigkeit bestimmt wird, sollte die Brennweite

$$f \approx \frac{\pi d_s L}{200\lambda}$$

betragen (Kapitel 6.3.2). Dabei ist d_s der Streuflächendurchmesser, L die Breite

oder Höhe des Detektors, und λ die Wellenlänge des Lichtes.

Die Problematik der Mehrfach- und Tiefenstreuung im Probenmaterial und dem daraus resultierendem Musterkochen kann durch einen ausreichend kleinen zeitlichen Bildabstand τ i.a. minimiert werden. Eine weitere Möglichkeit zur Reduzierung des Musterkochens ist das Auftragen einer Beschichtung aus Graphit (Graphit-Lack) auf das Probenmaterial.

Durch die Wahl einer Schranke für das Signal-Rausch-Verhältnis SNR des Kreuzkorrelationsbildes kann die Brauchbarkeit einer Messung bestimmt werden. Gegebenfalls müssen die Meßparameter korrigiert werden (z.B. kleinerer zeitlicher Bildabstand τ oder eine andere Meßgeometrie).

Die Genauigkeit der Bestimmung der Specklewanderungsgeschwindigkeit aus dem Kreuzkorrelationsbild durch Bestimmung des Abstandes des Maximums des Kreuzkorrelationsbildes zu dessen Mittelpunkt kann durch eine Paraboloidregression auf bis zu ± 0.2 Pixeln je Zeiteinheit verbessert werden.

Literaturverzeichnis

- [1] Wilfried Staude, Laserstrophometrie, 1997 (unveröffentlicht)
- [2] Ed. J.C. Dainty, Laser Speckle and related phenomena, Springer 1984
- [3] W. Demtröder, Laser Spektroskopie, Springer 1991
- [4] RWTH Aachen, Institut für allgemeine Mechanik, Festigkeitslehre (Vorlesungsskript), 1997
- [5] F.Pedrotti et al., Optik, eine Einführung, Prentice Hall, 1996
- [6] B. Jähne, Digitale Bildverarbeitung, Springer 1997
- [7] R.C. Gonzalez, P. Wintz, Digital Image Processing, Addison Wesley, 1977
- [8] H. Stöcker, Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren, Verlag Harri Deutsch, 1991
- [9] H. Kriegs, Die Doppelpuls-Speckle-Strophometrie - ein optisches Verfahren zur Messung der Momentanwerte von Geschwindigkeitsgradienten in turbulenten Strömungen, Dissertation Bremen, 1993
- [10] H. Breyer, Die differentielle Speckle-Anemometrie - ein neues fluiddynamisches Meßverfahren, Dissertation Bremen, 1991
- [11] M. Renken, Die Zeitentwicklung ausgedehnter Wirbelstrukturen in einer turbulenten Kanalströmung, Dissertation Bremen, 1997
- [12] C. Keveloh, W. Staude, Determination of velocity gradients with scattered light cross-correlation measurements, Appl. Opt. **22**, 333-338, (1983)
- [13] T. Yoshimura, Statistical properties of dynamic speckles, J. Opt. Soc. Am. **A 3**, 1032-1054 (1986)
- [14] L.Mandel, E. Wolf, Optical coherence and quantum optics, Cambridge, 1995
- [15] J.E. Freund, Mathematical statistics, Prentice Hall, 1992
- [16] R.O. Brigham, Fast Fourier Transforms, 1977

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. Wilfried Staudé für die hervorragende Betreuung und die zahlreichen Anregungen zu dieser Arbeit.

Ich bedanke mich bei meinen Kollegen Bruno Matzas und Matthias Renken für zahlreiche Diskussionen und das gute Arbeitsklima sowie bei unserem technischen Mitarbeiter Hartmut Rohbeck.

Die Anregung zu dieser Arbeit lieferte Dr. Bernhard Schwark-Werwach, dem ich nicht nur dafür sondern auch für die geliehene CCD-Kamera danken möchte, die mir den Einstieg in die Experimente ermöglichte.